


Programa de teoría

Algoritmos y Estructuras de Datos II

1. Análisis de algoritmos
2. Divide y vencerás
3. Algoritmos voraces
-  **4. Programación dinámica**
5. Backtracking
6. Ramificación y poda

ALGORITMOS Y E. D. II

Tema 4. Programación dinámica

4.1. Método general

4.2. Análisis de tiempos de ejecución

4.3. Ejemplos de aplicación

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

4.3.2. Problema del cambio de monedas

4.1. Método general

- La base de la **programación dinámica** es el **razonamiento inductivo**: ¿cómo resolver un problema combinando soluciones para problemas más pequeños?
- La idea es la misma que en **divide y vencerás...** pero aplicando una estrategia distinta.
- **Similitud**:
 - Descomposición recursiva del problema.
 - Se obtiene aplicando un razonamiento inductivo.
- **Diferencia**:
 - Divide y vencerás: aplicar directamente la fórmula recursiva (programa recursivo).
 - Programación dinámica: resolver primero los problemas más pequeños, guardando los resultados en una tabla (programa iterativo).

4.1. Método general

- **Ejemplo. Cálculo de los números de Fibonacci.**

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n \leq 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{Si } n > 2 \end{cases}$$

- **Con divide y vencerás:**

operación Fibonacci (n: entero): entero

si $n \leq 2$ entonces devolver 1

sino devolver Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2)

- **Con programación dinámica:**

operación Fibonacci (n: entero): entero

T[1]:= 1; T[2]:= 1

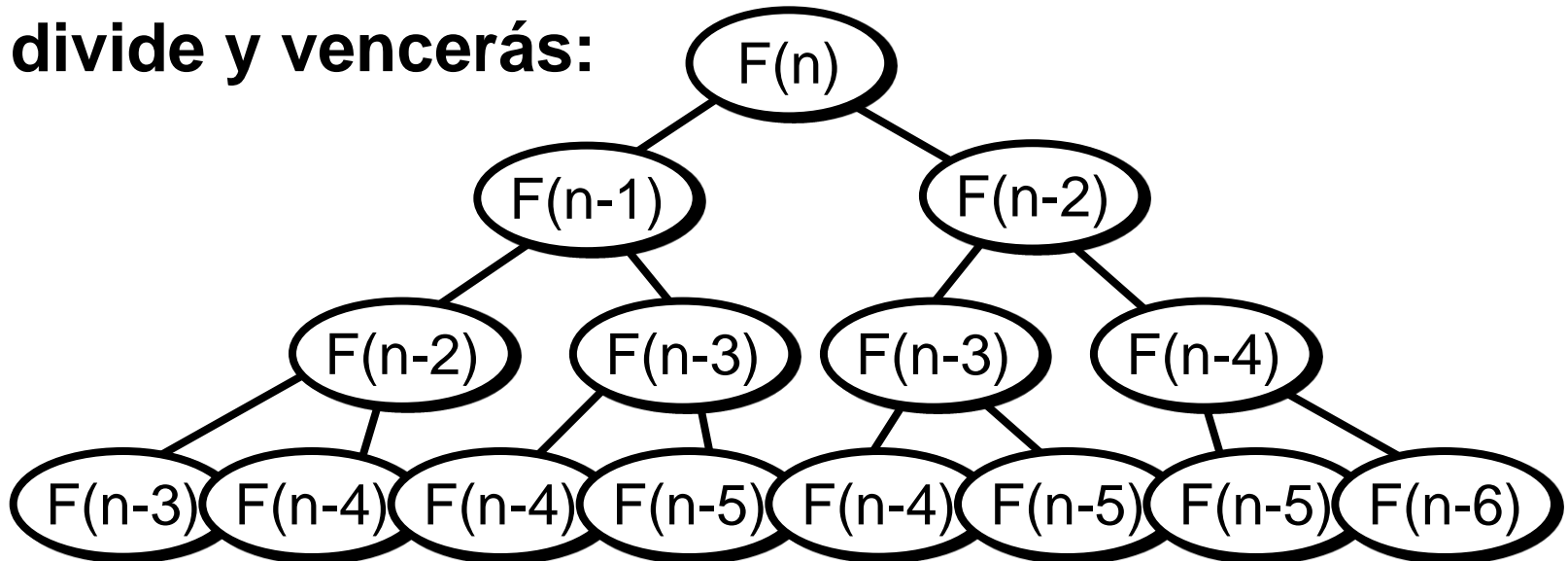
para i:= 3, ..., n hacer

T[i]:= T[i-1] + T[i-2]

devolver T[n]

4.1. Método general

- Los dos usan la misma fórmula recursiva, aunque de forma distinta.
- ¿Cuál es más eficiente?
- **Con programación dinámica:** $\Theta(n)$
- **Con divide y vencerás:**



- **Problema:** Muchos cálculos están repetidos.
- El tiempo de ejecución es exponencial: $\Theta(1,62^n)$

4.1. Método general

Métodos ascendentes y descendentes

- **Métodos descendentes (divide y vencerás)**
 - Empezar con el problema original y descomponer recursivamente en problemas de menor tamaño.
 - Partiendo del problema grande descendemos hacia problemas más sencillos.
- **Métodos ascendentes (programación dinámica)**
 - Resolvemos primero los problemas pequeños (guardando las soluciones en una tabla). Después los vamos combinando para resolver los problemas más grandes.
 - Partiendo de los problemas pequeños avanzamos hacia los más grandes.

4.1. Método general

- **Ejemplo. Algoritmo de Floyd** para calcular los caminos mínimos entre cualquier par de nodos de un grafo.
- **Razonamiento inductivo:** para calcular los caminos mínimos pudiendo pasar por los **k** primeros nodos usamos los caminos mínimos pasando por los **k-1** primeros.
- **$D_k(i, j)$:** camino mínimo de **i** a **j** pudiendo pasar por los nodos **1, 2, ..., k**.

$$D_k(i, j) = \begin{cases} C[i, j] & \text{Si } k=0 \\ \min(D_{k-1}(i, j), D_{k-1}(i, k) + D_{k-1}(k, j)) & \text{Si } k>0 \end{cases}$$

$D_n(i, j) \rightarrow$ caminos mínimos finales

4.1. Método general

- **Ejemplo. Algoritmo de Floyd.**
- Aplicación de la fórmula:
 - Empezar por el problema pequeño: $k = 0$
 - Avanzar hacia problemas más grandes: $k = 1, 2, 3, \dots$
- ¿Cómo se garantiza que un algoritmo de programación dinámica obtiene la solución correcta?
- Una descomposición es correcta si cumple el **Principio de optimalidad de Bellman:**

La solución óptima de un problema se obtiene combinando soluciones óptimas de subproblemas.

4.1. Método general

- O bien: cualquier subsecuencia de una secuencia óptima debe ser, a su vez, una secuencia óptima.
- **Ejemplo.** Si el camino mínimo de **A** a **B** pasa por **C**, entonces los trozos de camino de **A** a **C**, y de **C** a **B** deben ser también mínimos.
- **Ojo:** el principio no siempre es aplicable.
- **Contraejemplo.** Si el camino simple más largo de **A** a **B** pasa por **C**, los trozos de **A** a **C** y de **C** a **B** no tienen por qué ser soluciones óptimas.

4.1. Método general

Pasos para aplicar programación dinámica:

- 1) Obtener una **descomposición recurrente** del problema:
 - Ecuación recurrente.
 - Casos base.
 - 2) Definir la **estrategia** de aplicación de la fórmula:
 - Tablas utilizadas por el algoritmo.
 - Orden y forma de rellenarlas.
 - 3) Especificar cómo se **recompone la solución** final a partir de los valores de las tablas.
- **Punto clave:** obtener la descomposición recurrente.
 - Requiere mucha “creatividad”...

4.1. Método general

- Cuestiones a resolver en el razonamiento inductivo:
 - ¿Cómo reducir un problema a subproblemas más simples?
 - ¿Qué parámetros determinan el **tamaño del problema**? es decir, ¿cuándo el problema es “más simple”?
- **Idea:** ver lo que ocurre al tomar una decisión concreta
→ interpretar el problema como un proceso de toma de decisiones.
- **Ejemplos. Floyd.** Decisiones: pasar o no pasar por un nodo intermedio.
- **Mochila 0/1.** Decisiones: coger o no coger un objeto dado.

4.2. Análisis de tiempos de ejecución

- La programación dinámica se basa en el uso de **tablas** donde se almacenan los resultados parciales.
- En general, el **tiempo** será de la forma:
tamaño de la tabla * tiempo de rellenar cada elemento de la tabla.
- Un aspecto **importante** es la memoria que puede llegar a ocupar la tabla.
- Además, algunos de estos cálculos pueden ser innecesarios.

4.3. Ejemplos de aplicación

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- Como el problema de la mochila, pero los objetos no se pueden partir (se cogen enteros o nada).
- **Datos del problema:**
 - **n**: número de objetos disponibles.
 - **M**: capacidad de la mochila.
 - **p** = (p_1, p_2, \dots, p_n) pesos de los objetos.
 - **b** = (b_1, b_2, \dots, b_n) beneficios de los objetos.

- **Formulación matemática:**

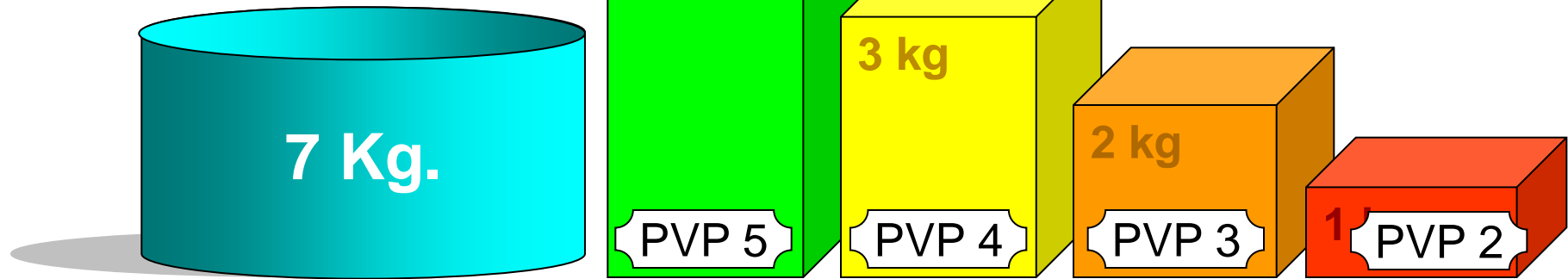
Maximizar $\sum_{i=1..n} x_i b_i$; sujeto a la restricción $\sum_{i=1..n} x_i p_i \leq M$, y $x_i \in \{0, 1\}$

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- **Ejemplo:** $n = 4$; $M = 7$

$b = (2, 3, 4, 5)$

$p = (1, 2, 3, 4)$



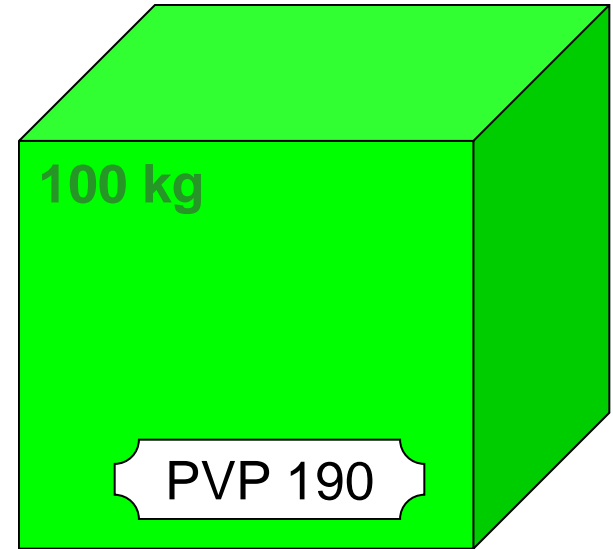
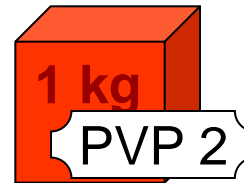
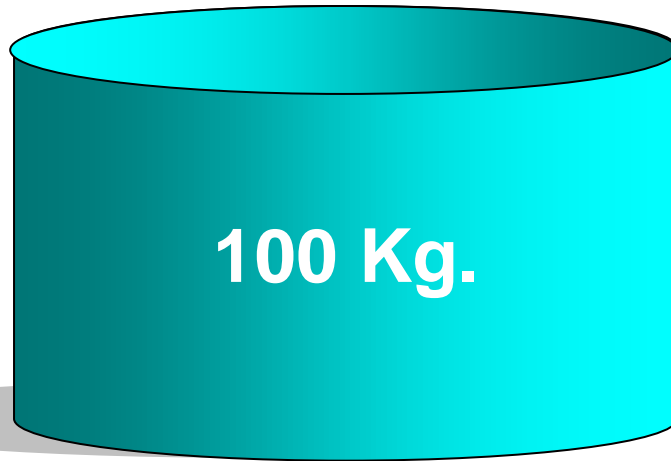
- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz para el problema de la mochila no 0/1?
- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz adaptado al caso 0/1 (o se coge un objeto entero o no)?
- ¿Cuál es la solución óptima?
- **Ojo:** el problema es un NP-completo clásico.

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- **Ejemplo:** $n = 2$; $M = 100$

$$b = (2, 190)$$

$$p = (1, 100)$$



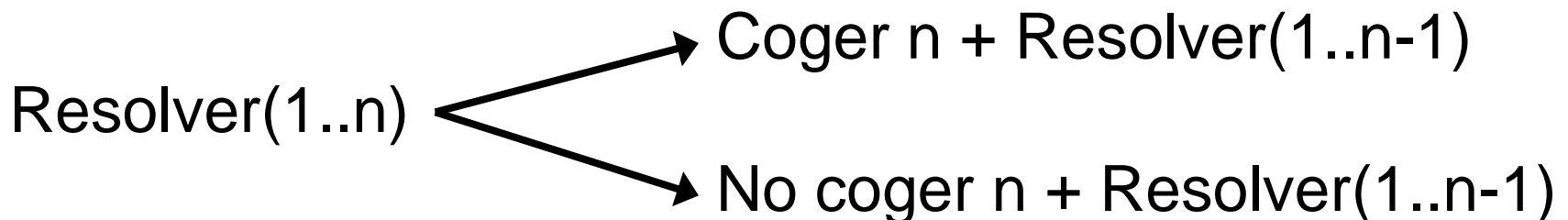
- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz para el problema de la mochila no 0/1?
- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz adaptado al caso 0/1 (o se coge un objeto entero o no)?
- ¿Cuál es la solución óptima?

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- Aplicamos programación dinámica al problema...

Paso 1)

- ¿Cómo obtener la descomposición recurrente?
- Interpretar el problema como un **proceso de toma de decisiones**: coger o no coger cada objeto.
- Después de tomar una decisión particular sobre un objeto, nos queda un problema de menor tamaño (con un objeto menos).
- ¿Coger o no coger un objeto?



4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- ¿Coger o no coger un objeto k ?
 - **Si se coge**: tenemos el beneficio b_k , pero en la mochila queda menos espacio, p_k .
 - **Si no se coge**: tenemos el mismo problema pero con un objeto menos por decidir.
- ¿Qué varía en los subproblemas?
 - Número de objetos por decidir.
 - Peso disponible en la mochila.
- **Ecuación del problema. Mochila(k , m : entero): entero**
Problema de la mochila 0/1, considerando sólo los k primeros objetos (de los n originales) con capacidad de mochila m . Devuelve el valor de beneficio total.

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- **Definición de Mochila(k, m: entero): entero**
 - **Si no se coge el objeto k:**
 $Mochila(k, m) = Mochila(k - 1, m)$
 - **Si se coge:**
 $Mochila(k, m) = b_k + Mochila(k - 1, m - p_k)$
 - **Valor óptimo:** el que dé mayor beneficio:
 $Mochila(k, m) = \max \{ Mochila(k - 1, m), b_k + Mochila(k - 1, m - p_k) \}$
- **Casos base:**
 - Si $m=0$, no se pueden incluir objetos: $Mochila(k, 0) = 0$
 - Si $k=0$, tampoco se pueden incluir: $Mochila(0, m) = 0$
 - ¿Y si m o k son negativos?

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- **Casos base:**

- Si m o k son negativos, el problema es irresoluble:

$$\text{Mochila}(k, m) = -\infty$$

- **Resultado.** La siguiente ecuación obtiene la solución óptima del problema:

$$\text{Mochila}(k, m) = \begin{cases} 0 & \text{Si } k=0 \text{ o } m=0 \\ -\infty & \text{Si } k<0 \text{ o } m<0 \\ \max \{ \text{Mochila}(k-1, m), b_k + \text{Mochila}(k-1, m-p_k) \} & \end{cases}$$

- ¿Cómo aplicarla de forma ascendente?
- Usar una tabla para guardar los resultados de los sub-problemas.
- Rellenar la tabla: empezando por los casos base, y avanzando a tamaños mayores.

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

Paso 2) Definición de las tablas y cómo rellenarlas

2.1) Dimensiones y tamaño de la tabla

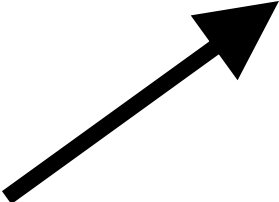
- Definimos la tabla V , para guardar los resultados de los subproblemas: $V[i, j] = \text{Mochila}(i, j)$
- La solución del problema original es $\text{Mochila}(n, M)$.
- Por lo tanto, la tabla debe ser:
V: array [0..n, 0..M] de entero

- Fila 0 y columna 0: casos base de valor 0.
- Los valores que caen fuera de la tabla son casos base de valor $-\infty$.

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

2.2) Forma de rellenar las tablas:

- Inicializar los casos base:
 $V[i, 0] := 0; V[0, j] := 0$
- Para todo i desde 1 hasta n
Para todo j desde 1 hasta M , aplicar la ecuación:
$$V[i, j] := \max (V[i-1, j], b_i + V[i-1, j-p_i])$$
- El beneficio óptimo es $V[n, M]$



Ojo: si $j-p_i$ es negativo, entonces es el caso $-\infty$, y el máximo será siempre el otro término.

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- **Ejemplo.** $n= 3$, $M= 6$, $p= (2, 3, 4)$, $b= (1, 2, 5)$

j

V	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	2	2	3	3
3	0	0	1	2	5	5	6

i

- ¿Cuánto es el orden de complejidad del algoritmo?

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

Paso 3) Recomponer la solución óptima

- $V[n, M]$ almacena el beneficio óptimo, pero ¿cuáles son los objetos que se cogen en esa solución?
- Obtener la tupla solución (x_1, x_2, \dots, x_n) usando V .
- **Idea:** partiendo de la posición $V[n, M]$, analizar las decisiones que se tomaron para cada objeto i .
 - Si $V[i, j] = V[i-1, j]$, entonces la solución no usa el objeto i
→ $x_i := 0$
 - Si $V[i, j] = V[i-1, j-p_i] + b_i$, entonces sí se usa el objeto i
→ $x_i := 1$
 - Si se cumplen ambas, entonces podemos usar el objeto i o no (existe más de una solución óptima).

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

3) Cómo recomponer la solución óptima

$j := P$

para $i := n, \dots, 1$ **hacer**

si $V[i, j] == V[i-1, j]$ **entonces**

$x[i] := 0$

sino

 // $V[i, j] == V[i-1, j-p_i] + b_i$

$x[i] := 1$

$j := j - p_i$

finsi

finpara

- Aplicar sobre el ejemplo anterior.

4.3.1. Problema de la mochila 0/1

- ¿Cuánto será el tiempo de recomponer la solución?
- ¿Cómo es el tiempo en relación al algoritmo de backtracking y al de ramificación y poda?
- ¿Qué pasa si multiplicamos todos los pesos por 1000?
- ¿Se cumple el principio de optimalidad?

4.3.2. Problema del cambio de monedas

- **Problema:** dado un conjunto de n tipos de monedas, cada una con valor c_i , y dada una cantidad P , encontrar el número mínimo de monedas que tenemos que usar para obtener esa cantidad.
- El algoritmo voraz es muy eficiente, pero sólo funciona en un número limitado de casos.
- **Utilizando programación dinámica:**
 - 1) Definir el problema en función de problemas más pequeños.
 - 2) Definir las tablas de subproblemas y la forma de rellenarlas.
 - 3) Establecer cómo obtener el resultado a partir de las tablas.

4.3.2. Problema del cambio de monedas

1) Descomposición recurrente del problema

- Interpretar como un problema de toma de decisiones.
- ¿Coger o no coger **una** moneda de tipo **k**?
- **Si se coge**: usamos una más y tenemos que devolver cantidad c_k menos.
- **Si no se coge**: tenemos el mismo problema pero descartando la moneda de tipo **k**.
- ¿Qué varía en los subproblemas?
 - Tipos de monedas a usar.
 - Cantidad por devolver.
- **Ecuación del problema. Cambio(k, q: entero): entero**
Problema del cambio de monedas, considerando sólo los **k** primeros tipos, con cantidad a devolver **q**. Devuelve el número mínimo de monedas necesario.

4.3.2. Problema del cambio de monedas

- **Definición de Cambio(k, q: entero): entero**
 - **Si no se coge ninguna moneda de tipo k:**
 $\text{Cambio}(k, q) = \text{Cambio}(k - 1, q)$
 - **Si se coge 1 moneda de tipo k:**
 $\text{Cambio}(k, q) = 1 + \text{Cambio}(k, q - c_k)$
 - **Valor óptimo:** el que use menos monedas:
$$\text{Cambio}(k, q) = \min \{ \text{Cambio}(k - 1, q), 1 + \text{Cambio}(k, q - c_k) \}$$
- **Casos base:**
 - Si $q=0$, no usar ninguna moneda: $\text{Cambio}(k, 0) = 0$
 - En otro caso, si $q < 0$ o $k \leq 0$, no se puede resolver el problema: $\text{Cambio}(q, k) = +\infty$

4.3.2. Problema del cambio de monedas

- **Ecuación recurrente:**

$$\text{Cambio}(k, q) = \begin{cases} 0 & \text{Si } q=0 \\ +\infty & \text{Si } q < 0 \text{ ó } k \leq 0 \\ \min \{ \text{Cambio}(k-1, q), 1 + \text{Cambio}(k, q-c_k) \} & \end{cases}$$

2) Aplicación ascendente mediante tablas

- Matriz **D** $\rightarrow D[i, j] = \text{Cambio}(i, j)$
- **D: array [1..n, 0..P] de entero**

```
para i:= 1, ..., n hacer D[i, 0]:= 0
para i:= 1, ..., n hacer
  para j:= 1, ..., P hacer
    D[i, j]:= min(D[i-1, j], 1+D[i, j-ci])
devolver D[n, P]
```

Ojo si cae fuera de la tabla.

4.3.2. Problema del cambio de monedas

- **Ejemplo.** $n= 3$, $P= 8$, $c= (1, 4, 6)$

j

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1 $c_1=1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
i 2 $c_2=4$	0	1	2	3	1	2	3	4	2
3 $c_3=6$	0	1	2	3	1	2	1	2	2

- ¿Cuánto es el orden de complejidad del algoritmo?
- ¿Cómo es en comparación con el algoritmo voraz?

4.3.2. Problema del cambio de monedas

3) Cómo recomponer la solución a partir de la tabla

- ¿Cómo calcular cuántas monedas de cada tipo deben usarse, es decir, la tupla solución (x_1, x_2, \dots, x_n) ?
- Analizar las decisiones tomadas en cada celda, empezando en $D[n, P]$.
- ¿Cuál fue el mínimo en cada $D[i, j]$?
 - $D[i - 1, j] \rightarrow$ No utilizar ninguna moneda más de tipo i .
 - $D[i, j - C[i]] + 1 \rightarrow$ Usar una moneda más de tipo i .
- Implementación:
 x : array $[1..n]$ de entero
 $\rightarrow x[i] =$ número de monedas usadas de tipo i

4.3.2. Problema del cambio de monedas

3) Cómo recomponer la solución a partir de la tabla

$x := (0, 0, \dots, 0)$

$i := n$

$j := P$

mientras $(i \neq 0)$ **AND** $(j \neq 0)$ **hacer**

si $D[i, j] == D[i-1, j]$ **entonces**

$i := i - 1$

sino

$x[i] := x[i] + 1$

$j := j - C_i$

finsi

finmientras

- ¿Qué pasa si hay varias soluciones óptimas?
- ¿Y si no existe ninguna solución válida?

4. Programación dinámica

Conclusiones

- El **razonamiento inductivo** es una herramienta muy potente en resolución de problemas.
- Aplicable no sólo en problemas de optimización.
- ¿Cómo obtener la fórmula? Interpretar el problema como una serie de **toma de decisiones**.
- Descomposición recursiva no necesariamente implica implementación recursiva.
- **Programación dinámica:** almacenar los resultados en una tabla, empezando por los tamaños pequeños y avanzando hacia los más grandes.