1.1. Obtener el tiempo de ejecución t(n), O(t(n)), Ω(t(n)) y o(t(n)) para el siguiente algoritmo de multiplicación de matrices:

```
for i= 1 to n
    for j= 1 to n
        suma= 0
        for k= 1 to n
            suma= suma + a[i, k]·b[k, j]
        endfor
        c[i, j]= suma
    endfor
endfor
```

¿Cuál es el significado de t(n) en este caso? ¿Dependen O(t(n)) y Ω(t(n)) de este significado? ¿Y o(t(n))? Justificar las respuestas.

1.2. (TG 7.1) Obtener O y Ω, y Θ del tiempo promedio para el algoritmo de búsqueda binaria.

```
i= 1
j= n
repeat
    m= (i+j) div 2
    if a[m] > x
        j= m-1
    else
        i= m+1
    endif
until i>j or a[m]=x
```

1.3. Demostrar que siendo a, b, c $\in R^+$ y d, $n_0 \in N$, con d > 0 y:

$$f(n) = \begin{cases} c & \text{si } n < n_0 \\ a \cdot f(n-d) + b & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se cumple que:
$a < 1 \Rightarrow f \in O(1)$
$a = 1 \Rightarrow f \in O(n)$
$a > 1 \Rightarrow f \in O(a^{n/d})$

1.4. Decir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

- $\Theta(\log_2 n) = \Theta(\log_{10} n)$
- $O(2^n) = O(2^{n+3})$
- $O(n^{n+2}) = O(n^{n+3})$
- $O(m*n) \subseteq O(2^n)$

1.5. El tiempo de ejecución de un determinado programa se puede expresar con la siguiente ecuación de recurrencia:

$$t(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \leq 10 \\ 2*t(\lfloor n/2 \rfloor) + 3*t(\lfloor n/4 \rfloor) + 2n + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Estudiar el tiempo de ejecución del algoritmo, para los valores de **n** que sean potencia de 2. A partir del tiempo **t(n)**, expresar la complejidad usando las notaciones O, Ω ó Θ. (No hace falta calcular el valor de las constantes de **t(n)**, se supondrán todas positivas.)
b) Mostrar las condiciones iniciales que deberían aplicarse para calcular las constantes en la fórmula de **t(n)**. Sólo es necesario indicar los valores de **n** que son las condiciones iniciales y escribir alguna de las ecuaciones que surgen de esas condiciones. No es necesario resolverlas.
c) La afirmación **t(n)** $\in \Omega(\log n)$ ¿es correcta en este caso?, ¿es una buena cota para el orden de complejidad del programa? Justificar las respuestas.

1.6. Calcular el tiempo de ejecución y el orden exacto del siguiente algoritmo:

```
p = 0
for i = 1 to n
      p = p + i*i
      for j = 1 to p
            write (a[p, j])
      endfor
endfor
```

1.7. Resolver la ecuación recurrente: $t(n) - 2t(n-1) = n + 2^n$, con $n > 0$, y $t(0) = 0$.

1.8. Demostrar que siendo a, b, c, d $\in R^+$ y e, $n_0 \in N$, con $e > 0$ y:

$$f(n) = \begin{cases} d & \text{si } n < n_0 \\ a \cdot f(n/e) + bn + c & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se cumple que:
$a < e \Rightarrow f \in O(n)$
$a = e \Rightarrow f \in O(n \cdot \log n)$
$a > e \Rightarrow f \in O(n^{\log_e a})$

Estudiar qué pasaría si alguna de las constantes utilizadas (a, b, c, d ó e) fuera negativa.

1.9. (TG 8.2) Calcular el tiempo de ejecución en segundos, en función del valor de **n**, del siguiente programa Pascal. A partir del tiempo, expresar el orden de complejidad.

```
procedure Algoritmo (x: array [1..MAX, 1..MAX] of real; n: integer)
var
    i, j: integer;
    a, b, c: array [1..MAX, 1..MAX] of real;
```

```
begin
    if n > 1 then begin
        for i:= 1 to n div 2 do
            for j:= 1 to n/2 do begin
                a[i, j]:= x[i, j];
                b[i, j]:= x[i, j + n div 2];
                c[i, j]:= x[i+n div 2, j];
            end;
        Algoritmo (a, n div 2);
        Algoritmo (b, n div 2);
        Algoritmo (c, n div 2);
    end;
end;
```

1.10. Hacer una estimación de la máxima cantidad de memoria requerida por el algoritmo anterior, en función del valor de **MAX** y de **n**. Suponer que un valor de tipo real ocupa **r** bytes de memoria.

1.11. Calcular una buena cota superior de la complejidad del siguiente algoritmo:

```
procedure dos (a: array [1..n] of integer; x, y: integer)
    if x ≠ y
        if 2·a[x] < a[y]
            dos (a, x, y div 2)
        else
            dos (a, 2x, y)
        endif
    endif
```

Suponer que los datos del array **a** están ordenados de manera creciente.

1.12. Hacer un algoritmo recursivo para el cálculo del n-ésimo número de Fibonacci. Calcular su tiempo de ejecución y la memoria ocupada. Dar también una fórmula explícita **f(n)** = ..., no recursiva, que devuelva el n-ésimo número de Fibonacci.

1.13. Dado el siguiente algoritmo en Pascal:

```
PROCEDURE invierte (A: array [0..n, 0..n] of integer);
var
    i, j: integer;
begin
    for i:= 0 to n-1 do
        for j:= i+1 to n do
            A[i, j]:= 2*A[j, i]+A[i, j];
end;
```

a) Calcular el tiempo de ejecución **t(n)**, y el número de veces que se ejecutará la instrucción de asignación sobre la matriz **f(n)**. Si se utilizan constantes en los cálculos, definir el significado de cada una de ellas.

b) Expresar el orden de complejidad de **t(n)** con las notaciones Θ y o. El valor del tiempo de ejecución **t(n)** = **X**, ¿en qué unidades está dado?

1.14. Para el problema anterior deseamos calcular el valor de las constantes, de manera que la previsión del tiempo sea un valor numérico lo más cercano posible al tiempo real de ejecutar el programa. Se supone que el programa es ejecutado en un ordenador determinado y usando un compilador particular.

a) Detallar los pasos a seguir y los cálculos que se deberían hacer para encontrar los valores de las constantes (medidas ahora en unidades de tiempo reales, por ejemplo segundos o milisegundos).
b) Implementar el programa y usar ese proceso que se ha creado para encontrar el valor de las constantes.
c) Por último, hacer previsiones del tiempo que tardará para distintos valores de **n** (suficientemente grandes) con la fórmula obtenida y compáralos con los tiempos reales medidos para ese tamaño. Comentar los resultados obtenidos. ¿Es buena la previsión calculada? ¿A qué se debe el error cometido?
d) Repetir el mismo proceso con los algoritmos de los ejercicios 145, 150, 153, 178 y 182.

1.15. (TG 6.3) Dado el programa:

```
i= 1
while i ≤ n
    if a[i] ≥ a[n]
            a[n]= a[i]
    endif
    i= i * 2
endwhile
```

Calcular:

a) Su orden exacto. En caso de aparecer un orden condicionado, eliminar la restricción.
b) El número promedio de asignaciones en el array.

1.16. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decir justificadamente si son ciertas o falsas:

- $\Omega(f(n)+g(n)) = \Omega(\min(f(n), g(n)))$
- $t(n+1) \in \Theta(t(n))$ para toda función $t: N \rightarrow R^+$
- $\Theta(2n^2 + 5n - 1) = \Theta(n^2)$

1.17. (TG 6.4) Dado el siguiente procedimiento:

```
Contar (izq, der: indices): integer
    if izq ≥ der
            return 0
    elsif a[izq] < a[der]
            return (Contar (izq*2, der) + 1)
    else
            return (Contar (izq*2, der))
    endif
```

donde **a** es un array global de valores enteros, calcular, para la llamada inicial de Contar (1, n), el orden exacto del tiempo de ejecución en el caso más favorable, más desfavorable y promedio. ¿Coinciden los órdenes en los tres casos anteriores? ¿Coinciden los tiempos de ejecución?

1.17 TG 7.2) Tenemos claves formadas por una serie no limitada de campos, de la forma:

Clave = (campo$_1$, campo$_2$, campo$_3$, ...)

Sabemos que la probabilidad de que el contenido del *campo$_i$* sea igual en dos claves distintas es 1/(1+i). Calcular el orden exacto del tiempo promedio de la comparación de dos claves. Expresar también el tiempo de ejecución, para todos los casos, con las notaciones de complejidad vistas en clase. **Sugerencia:** para comparar las claves, primero se comprueba *campo$_1$*, si es distinto se comprueba *campo$_2$*, y así sucesivamente.

1.18 Encontrar O y Ω del algoritmo:

```
max = 0
for i = 1 to n
        cont = 1
        j = i + 1
        while a[i] ≤ a[j]
                j = j + 1
                cont = cont + 1
        endwhile
        if cont > max
                max = cont
        endif
endfor
```

1.19. (TG 7.3) Calcular la o pequeña del número promedio de asignaciones del algoritmo:

```
max= a[1]
for i = 2 to n
         if a[i] > max
                  max = a[i]
         endif
endfor
```

1.20. El tiempo de ejecución de un programa viene dado por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$t(n) = \begin{cases} n! & \text{Si } n \leq 5 \\ 4*t(\lfloor n/4 \rfloor) + 3\lfloor \log_2 n \rfloor & \text{En otro caso} \end{cases}$$

a) Estudiar el tiempo de ejecución, para los valores de **n** que sean potencia de 2. A partir del tiempo **t(n)**, expresar la complejidad. (No hace falta calcular el valor de las constantes de **t(n)**, se supondrán todas positivas.)
b) Indicar cuántas condiciones iniciales deberían aplicarse para calcular las constantes en la fórmula de **t(n)**, y para qué valores de **n**. Sólo es necesario indicar las ecuaciones que deberían resolverse, no es necesario resolverlas.
c) ¿Qué ocurre con el tiempo de ejecución y con el orden de complejidad (decir si se modifican o no, y por qué) si cambiamos:
   - en lugar de n!, una función **g(n)** cualquiera?,
   - en lugar del primer 4 (en $4*t(\lfloor n/4 \rfloor)$) ponemos un valor **b** positivo cualquiera?,
   - en lugar del 3 (en $3 \lfloor \log_2 n \rfloor$) ponemos un valor **c** positivo cualquiera?,
   - en lugar del 2 (en $3 \lfloor \log_2 n \rfloor$) ponemos un valor **d** positivo cualquiera?

1.21. Resolver la siguiente ecuación recurrente, indicando las condiciones iniciales que se deberían aplicar:

$$t(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n < n_0 \\ 8 \cdot t(n-3) + 2^n + 1 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

1.22. Calcular O, Ω y Θ para el siguiente programa:

```
i = 1
j = 1
while i ≤ n and j ≤ n
      if a[i, j + 1] < a[i + 1, j]
            j = j + 1
      else
            i = i + 1
      endif
endwhile
```

1.23. El tiempo de ejecución de determinado algoritmo está dado por la siguiente ecuación de recurrencia:

$t(n) = n \cdot t^2(n-1) + t(n-2)$

siendo las condiciones iniciales: $t(n) = 0$, para $n \leq 0$. Calcular t(n) de forma explícita y expresarlo usando las notaciones de complejidad vistas en clase. **Nota**: se puede probar usando transformación de la imagen, inducción constructiva o expansión de recurrencias.

1.24. Dado el programa:

```
max = -∞
for i = 1 to n
      for j = 1 to m
            if a[i, j] > max
                  max= a[i, j]
            endif
      endfor
endfor
```

Calcular la cota inferior y superior del número de asignaciones a la variable **max** y el **o** (o pequeña) del número promedio de instrucciones que se ejecutan.

1.25. Los tiempos de ejecución de determinados algoritmos han sido expresados mediante las ecuaciones de recurrencia siguientes. Calcular los valores de t(n), calculando los valores de las constantes (indicando las condiciones iniciales que se aplican) y expresar su complejidad.

a) $t(n) = \begin{cases} n & \text{Si } n \leq 3 \\ 3 \cdot t(\lfloor n/2 \rfloor) + 2n \cdot \lfloor \log_2 n \rfloor & \text{Si } n > 3 \end{cases}$

b) $t(1) = 3$; $t(2) = 4$; $t(3) = 2$; y para $n > 3$ $t(n) = 2t(n-1) + 3t(n-2) + 1$

c) $t(n) = \begin{cases} n & \text{Si } n \leq 3 \\ 2 \cdot t(n-1) - 5 \cdot t(n-2) & \text{Si } n > 3 \end{cases}$

d) Para cada uno de los resultados anteriores, discutir si es posible que correspondan a algoritmos reales.

1.26. (TG 7.4) Dado el siguiente programa:

```
i = 1
j = n
while i < j
      if a[i] < a[j]
            i = i * 2
      else
            j = j / 2
      endif
endwhile
```

a) Calcular su orden exacto. Habrá que hacerlo considerando el tamaño como potencia de dos y quitando posteriormente esta restricción.
b) Calcular el orden exacto en el caso en que se sustituyan las sentencias "i = i*2" y "j = j/2" por "i = i+1" y "j = j – 1", respectivamente.

1.27. Para el siguiente programa, calcular el orden exacto del número promedio de veces que se ejecuta la instrucción "cont = cont + 1". Se supondrá que los valores del array **a** están desordenados y tienen una distribución aleatoria uniforme.

```
cont = 0
for i = 1 to n do
      for j = 1 to i-1 do
            if a[i]<a[j] then
                  cont = cont + 1
```

1.28. Dado el siguiente programa:

```
encontrado = false
for i = 1 to n-1 do
    if x[i] < y[1]
        if x[i+1] = y[2]
            encontrado = true
            lugar = i
        endif
    endif
    i = i + 1
endfor
```

Calcular su tiempo promedio de ejecución, suponiendo una probabilidad **p** de que dos elementos cualesquiera (de **x** o de **y**) sean iguales.

1.29. Suponer el siguiente algoritmo, que utiliza la técnica divide y vencerás.

```
PROCEDURE DivVenc (i, j: integer)
    if (i = j) then
        Combina (i, j);
    else begin
        m:= ( i+j ) / 2;
        a:= ( j – i ) / 4;
        DivVenc (i, m);
        DivVenc (i+a,  m+a);
        DivVenc (m+1, j);
        Combina (i, j);
    end;

PROCEDURE Combina (i, j: integer)
    for k:= i to j do
        for q:= i to j do
            Operacion(i, j, k, q);
```

a) Calcular el número de veces que se ejecuta la instrucción *Operacion*, suponiendo que la llamada inicial es **DivVenc (1, n)**. Para el resultado obtenido, expresar la complejidad con las notaciones O, Ω, Θ y o (o pequeña). (Se deben calcular todas las constantes que aparezcan en la fórmula.)
b) Para los resultados del punto anterior, si se ha hecho alguna suposición acerca del valor de **n**, eliminarla. Es decir, probar que el resultado es válido para cualquier valor de **n**.

1.30. Dada la siguiente ecuación de recurrencia, siendo a, b, c, $d \in R^+$ y $n_0 \in N$:

$$f(n) = \begin{cases} c & \text{Si } n \leq n_0 \\ a*f(n-1) + d \cdot b^n & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Encontrar el orden de complejidad de f(n), en función de la relación entre **a** y **b**. ¿Influyen los valores de **c** y **d** en el orden de complejidad? ¿Influyen en el valor de f(n)? Justificar las respuestas anteriores de manera razonada.

1.31. Considerar el siguiente algoritmo, implementado en notación Pascal:

```
PROCEDURE Cosa (n: integer; A: array [0..n, 0..n] of integer);
var
    i, j: integer;
begin
    i:= 1;
    repeat
        A[i, 0]:= 0;
        for j:= 1 to i do begin
            A[i, j]:= 0;
            Rec (i);
        end;
        i:= i+1;
    until i≥n;
end;

PROCEDURE Rec (n: integer);
begin
    if n=1 then
        A[n, n]:= A[n, n]+1;
    else begin
        Rec (n-1);
        Rec (n-1);
    end;
end;
```

a) Estudiar el número de veces **f(n)** que se realiza la asignación "A[n, n]:= A[n, n]+1", dentro del procedimiento **Rec**, para la ejecución de la llamada inicial **Cosa (n, A)**.
b) Calcular el tiempo de ejecución **t(n)** del procedimiento **Cosa**, en número de instrucciones. Expresar la complejidad de **t(n)** usando las notaciones O, Ω ó Θ, y con la notación o.
c) Suponiendo que calculamos el tiempo de ejecución **g(n)** en unidades de tiempo (por ejemplo, milisegundos) ¿qué relación existe entre **t(n)** y **g(n)**? ¿Por qué?

1.32. Calcular una cota inferior y superior para el orden de complejidad del siguiente algoritmo:

```
PROCEDURE Div23 (k: integer);
begin
    if k ≤ 1 then
        write ("Acaba la recursividad")
```

```
        else if EsPrimo(2^k-1) then
            Div23 (⌊k/2⌋)
        else begin
            Div23 (⌊k/3⌋);
            Div23 (⌈k/3⌉);
        end;
    end;
```

Suponer que la operación **EsPrimo(x)** requiere un tiempo constante.

1.33. (EX) Dado el siguiente algoritmo de suavizado uniforme de una imagen en escala de grises:

```
PROCEDURE Suavizado (Imagen: array [1..n, 1..n] of integer; m: integer);
var
    i, j: integer;
begin
    i:= m+1;
    repeat
        for j:= m+1 to n-m do
            mascara (Imagen, i, j, m);
        i:= i+1;
    until i > n-m;
end;

PROCEDURE mascara (A: array [1..n, 1..n] of integer; x, y, tam: integer);
var
    i, j, acum: integer;
begin
    acum:= 0;
    for i:= y-tam to y+tam do
        for j:= x-tam to x+tam do
            acum:= acum + A[i, j];
    A[x, y]:= acum/(4*tam*tam);
end;
```

a) ¿En función de qué parámetros está el tiempo de ejecución del procedimiento **mascara**? ¿Y el procedimiento **Suavizado**?
b) Calcular el tiempo de ejecución del procedimiento **mascara(A, x, y, tam)**.
c) Calcular el tiempo de ejecución de **Suavizado(I, m)**, en función del tamaño de la entrada. Expresar la complejidad del tiempo usando las notaciones Θ y o-pequeña.

1.34. Resolver la siguiente ecuación de recurrencia. Encontrar el valor de **t(n)** y el orden de complejidad. No es necesario calcular las constantes de **t(n)**.

$$t(n) = \begin{cases} 5 \log_2 n & \text{Si } n \leq 4 \\ 6t(n-2) - 4t(n-3) - 3n & \text{En otro caso} \end{cases}$$

1.35. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando la respuesta muy brevemente:

i. $4n^2 + 2n + \log_2 n \in O(n^2 + \log n)$
ii. $(2n)! \in \Omega(n!)$
iii. $\Omega(f(n) \mid n=2k) \subset \Omega(f(n) \mid n=2^k)$

1.36. Dado el siguiente algoritmo en sintaxis Pascal:

```
PROCEDURE Acumula (P: array [1..n] of integer; m: integer);
var
    i, acum: integer;
begin
    for i:= 1 to n do
        if P[i] < 1 then P[i]:= 1;
    i:= 1;
    acum:= 0;
    while true do begin
        acum:= acum + P[i];
        i:= i+1;
        if i > n then i:= 1;
        if acum >= m then exit;
    end;
end;
```

a) ¿En función de qué parámetros está el tiempo de ejecución del procedimiento **Acumula**? ¿El tiempo de ejecución depende del contenido de los datos de entrada o sólo del tamaño de la entrada?
b) Calcular el tiempo de ejecución del procedimiento **Acumula**. Expresar la complejidad del tiempo resultante usando las notaciones asintóticas conocidas.

1.37. Encontrar una fórmula (no recursiva) para calcular el resultado que devuelve la siguiente función, para la llamada **Rec(n)**. Calcular también el orden de complejidad del número de veces que se ejecuta la instrucción de asignación sobre la variable **a**.

```
FUNCTION Rec (i: integer): real;
var
    a: real;
begin
    if i ≤ 4 then return i
    else begin
        a:= 4*Rec (i-1);
        a:= a - 3*Rec (i-2);
        return a;
    end;
end;
```

1.38. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando la respuesta muy brevemente:

i. $\Omega(n) \subseteq O(n^2)$

ii. $f(n+1) \in O(f(n))$, $\forall\ f: N \rightarrow R^+$

iii. Los algoritmos que usan divide y vencerás tienen siempre órdenes de complejidad exponenciales.

1.39 ¿Cuál es el orden O(..) del número de nodos de un árbol AVL en el peor caso (máximo desbalanceo permitido) en función de la altura **h**? ¿Coincide con el mejor caso de árbol AVL (esto es, $O(2^h)$), es mayor o menor? Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál es el orden del procedimiento de búsqueda de un elemento en el peor caso de árbol AVL? ¿Es igual, mayor o menor que en el mejor caso de árbol AVL?

1.40. Resolver la siguiente ecuación de recurrencia.

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \leq 3 \\ \sqrt{3t^2(\lfloor n/2 \rfloor) - 2t^2(\lfloor n/4 \rfloor) + n} & \text{En otro caso} \end{cases}$$

a) Encontrar una fórmula para el valor de **t(n)**. Expresar la complejidad de la función **t(n)** usando las notaciones asintóticas adecuadas.

b) Si se ha utilizado alguna condición sobre el tamaño de la entrada para el cálculo anterior, comprobar que la condición puede ser eliminada. En particular, ¿qué resultado es válido para todos los valores de **n**: el valor de **t(n)**, el valor del orden de complejidad, los dos o ninguno?

c) ¿Es posible que una ecuación de recurrencia como la anterior puede surgir tras el conteo de instrucciones de un programa? ¿Por qué? Justificar la respuesta brevemente.

1.41. Escribir una función que devuelva siempre el mismo resultado que la siguiente función, pero tardando **un tiempo de ejecución constante**. Se supone que **m** es una variable global.

```
FUNCTION Simple (i: integer): integer;
var
    i, acum: integer;
begin
    if i = m then
        return m
    else if i >= m+1 then
        return 1
    else
        return 2*Simple (i+1) - Simple (i+2);
    end;
end;
```

1.42. La ecuación de recurrencia de abajo surge del análisis de cierto algoritmo que usa divide y vencerás.

$$f(n) = \begin{cases} 4n & \text{Si } n \leq 3 \\ n^2 + 5 & \text{Si } 3 < n \leq 10 \\ 2\, f(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\, f(\lfloor n/4 \rfloor) & \text{En otro caso} \end{cases}$$

a) Encontrar una fórmula no recursiva para el valor de **f(n)**, calculando también el valor de las constantes que puedan aparecer. Expresar la complejidad de **f(n)** usando las notaciones asintóticas O, Θ, Ω y o.
b) Escribir un procedimiento en notación Pascal (incluida la cabecera del mismo) cuyo análisis de complejidad pueda dar como resultado la anterior ecuación. ¿Cuál es la unidad medida por **f(n)** (número de instrucciones, segundos, ...)? **Sugerencia:** intentar que el procedimiento sea lo más simple posible.
c) Suponer que en el caso de abajo cambiamos n/4 por n/3, teniendo: $f'(n) = 2f'(\lfloor n/2 \rfloor) + 3f'(\lfloor n/3 \rfloor)$. Demostrar por inducción que $O(f(n)) \subseteq O(f'(n))$.

1.43. Considerar las dos siguientes operaciones.

```
procedure Primero (n: integer);
var
  i: integer;
  acum: real;
begin
  if n>0 then begin
    acum:= 0;
    for i:= 1 to 2 do
       acum:= acum + Segundo (n);
    write (acum);
  end;
end;
```

```
function Segundo (x: integer): real;
var
  j, k: integer;
begin
  k:= 0;
  for i:= 1 to x do
    k:= k+random(100);
  Primero (x div 2);
  Primero (x div 2);
  Segundo:= k/x;
end;
```

a) Hacer una estimación del tiempo de ejecución y el orden de complejidad del procedimiento **Primero**, para la llamada **Primero(n)**. No es necesario calcular el valor de las constantes que puedan aparecer. Si aparece alguna condición en el orden, elimínala si es posible.
b) Calcular el número exacto de veces que se ejecuta la instrucción "write(acum)", para la llamada **Primero(m)**. En este caso, ¿es posible eliminar la restricción? ¿Cuántas veces se ejecutará la instrucción "write(acum)" para **Primero(1025)**? ¿Y para **Primero(1026)**?

1.44. Calcular el tiempo que tarda la ejecución del siguiente trozo de código.

```
(1) va:= 0;
(2) for i:= 1 to p do begin
(3)    for j:= 1 to p do begin
(4)       va:= va + 1;
(5)       Delay (1000.0/va);
(6)    end;
(7) end;
```

Tener en cuenta que la instrucción **Delay (x : real)** tarda siempre **x** milisegundos. El tiempo de las demás instrucciones depende de la máquina donde se ejecute.

1.45. Considerar la variante de los números de Fibonacci, que denominaremos "números de **cuatrinacci**", definida a continuación. El n-ésimo número de cuatrinacci es igual a 3 veces el número (n−1)-ésimo, más 2 veces el (n−2)-ésimo, menos el n-ésimo número de cuatrinacci. El primer y el segundo números de cuatrinacci valen 1 y 3, respectivamente. Se pide lo siguiente.

a) Escribir tres posibles implementaciones para el cálculo del n-ésimo número de cuatrinacci usando: un método descendente de resolución de problemas (por ejemplo, un algoritmo de divide y vencerás), un método ascendente (por ejemplo, de programación dinámica), y un procedimiento que devuelva el resultado de forma directa, mediante una simple operación aritmética. **Ojo:** las implementaciones deben ser muy simples y cortas.
b) Hacer una estimación del orden de complejidad de los tres algoritmos del apartado anterior. Comparar los órdenes de complejidad obtenidos, estableciendo una relación de orden entre los mismos.

1.46. Calcular el número de instrucciones que ejecuta el siguiente trozo de código, donde todas las variables son de tipo real y toman valores próximos a 0.

```
(8)   act:= 1/10;
(9)   acum:= sqrt(act);
(10)  while act >= mini do begin
(11)     act:= act * 1/10;
(12)     acum:= acum + sqrt(act);
(13)  end;
(14)  return acum;
```

Sugerencia: estudiar el número de veces que se ejecuta el bucle para ciertos valores de **mini**, por ejemplo, para 10^{-3}, para 10^{-7}, etc.
¿Qué pasa si en las líneas (1) y (4) sustituimos 1/10 por 1/**d**, siendo **d** un natural cualquiera? ¿Cuál sería el tiempo de ejecución?

1.47. Dadas las dos siguientes operaciones, hacer una estimación del tiempo de ejecución del procedimiento **Ping**, para la llamada **Ping(n)**. Indicar claramente el significado de todas las constantes que se usen. Expresar el orden de complejidad usando la notación que se crea más adecuada y la o-pequeña. ¿Qué cambios ocurren en el tiempo de ejecución y en el orden de complejidad si en la función **Pong**, cambiamos la llamada **Ping(0)** por **Ping(1)**?

```
   procedure Ping (n: integer);
   var
     i, j: integer;
     valor: real;
   begin
(1)    valor:= 1.0;
```

```
   function Pong (m: integer): real;
   var
     tmp: real;
   begin
(6)    tmp:= sin(m*3.1416/180.0);
(7)    tmp:= tmp*tmp + 1.0;
```

```
(2)  for j:= 1 to 2*n do
(3)    for i:= 1 to j do
(4)      valor:= 2*Pong (i);
(5)  write (valor);
     end;
```

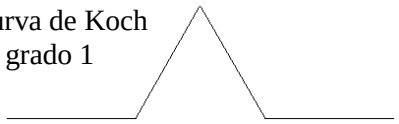
```
(8)  Ping (0);
(9)  Pong:= tmp/m;
     end;
```

1.48. Resolver la siguiente ecuación de recurrencia. Si aparecen más de 3 constantes en el tiempo de ejecución, no es necesario calcularlas, pero sí escribir las ecuaciones que habría que resolver para obtener su valor.

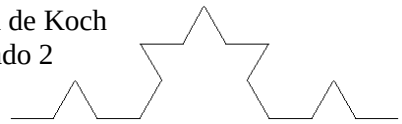
$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \leq 2 \\ 1 & \text{Si } 2 < n \leq 4 \\ 4n + 3\,f(n-1) + 4\,f(n-2) & \text{En otro caso} \end{cases}$$

1.49 La curva de Koch es una curva fractal que se construye de la siguiente forma. La curva de Koch de grado 0 es un segmento recto de longitud **m**. La curva de Koch de grado 1 se forma sustituyendo ese segmento por 4 segmentos contiguos, de longitud **m**/3, donde los dos centrales forman un ángulo de 60º (como se muestra en la figura de abajo). En general, la curva de Koch de grado **k** se forma sustituyendo cada segmento recto de la curva de Koch de grado **k**-1 por 4 segmentos de 1/3 de longitud del original, donde los dos centrales forman un ángulo de 60º.

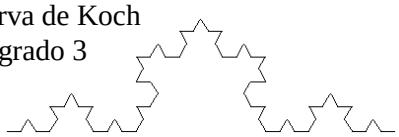
Curva de Koch de grado 1



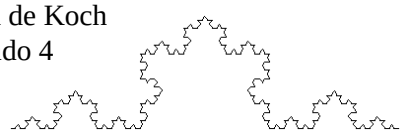
Curva de Koch de grado 2



Curva de Koch de grado 3



Curva de Koch de grado 4



a) Escribir un procedimiento para pintar la curva de Koch de grado **k** y longitud **m**, empezando en un punto (**x**, **y**). Indicar la cabecera del procedimiento. Para pintar se deben usar las operaciones: **Colocar(x,y)**: colocar el puntero en la posición (x,y); **MoverA(x,y)**: pintar una línea desde la posición actual del puntero hasta (x,y), que pasa a ser la nueva posición actual; **Línea(long, ang)**: pintar una línea de longitud **long** y con ángulo **ang**, empezando en la posición actual, y el otro extremo de la línea pasa a ser la nueva posición actual del puntero.
b) Calcular el tiempo de ejecución y el orden de complejidad del procedimiento del anterior apartado. Se supone que el tiempo de dibujar una línea de longitud **n** es un O(**n**). ¿Cuánto mide la curva de Koch de grado **k**? Suponiendo que el algoritmo tarda 3.25 segundos para cierto **m** y **k**=12, estimar de la forma más precisa posible cuánto tardará para **k**=18 y el mismo **m**.

1.50. Calcular el tiempo de ejecución y el orden de complejidad del siguiente algoritmo, para los valores de **n** que sean múltiplos de 2. Si aparecen más de 3 constantes en el tiempo no es necesario calcularlas. ¿Es válido el resultado para los valores de **n** impares?

```
procedure Erude (n, m: entero; var r: real);
(1) if n<1 then
(2)     r:= r+n+m;
(3)  else if n=2 then
(4)     r:= r*n*m;
(5)  else begin
(6)     m:= m*2;
(7)     Erude (n-1, m-1, r);
(8)     if n mod 2 = 0 then begin
(9)         for i:= 1 to 2 do
(10)            Erude (n-3, m-i, r);
(11)    end;
(12)    else begin
(13)        for i:= 1 to n do
(14)            r:= r*m*i;
(15)    end;
(16) end;
```

1.51. El tiempo de ejecución de determinado algoritmo viene dado por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$t(n) = \begin{cases} 2n^2 + 8 & \text{Si } n \leq 4 \\ 4\,t(n-1) - 5\,t(n-2) + 2\,t(n-3) + \log_2 n + 5 & \text{Si } n > 4 \end{cases}$$

Encontrar el orden exacto, Θ, del tiempo de ejecución del algoritmo. **Sugerencia:** en caso de no poder despejar el tiempo, probar buscando cotas superiores e inferiores del mismo.

1.52. Considerar el siguiente algoritmo para generar todas las combinaciones de **n** elementos de 4 en 4. Se supone que **marca** y **conv** son arrays globales de tamaño **n**, inicializados con valor 0. La llamada inicial al procedimiento es: **Combinaciones(1)**.

```
procedure Combinaciones (k: integer)
(1) for i:= 1 to n do begin
(2)     if marca[i] = 0 then begin
(3)         conv[k]:= i
(4)         if k = 4 then
(5)             escribir (conv[1], conv[2], conv[3], i)
(6)         else begin
(7)             marca[i]:= 1
(8)             Combinaciones(k+1)
(9)             marca[i]:= 0
(10)        end
(11)    end
(12) end
```

Calcular el tiempo de ejecución del algoritmo. Expresar el orden de complejidad del algoritmo usando la notación asintótica que se considere más adecuada.