

# **Programa de teoría**

## **Parte I. Estructuras de Datos.**

### **→ 1. Abstracciones y especificaciones.**

2. Conjuntos y diccionarios.
3. Representación de conjuntos mediante árboles.
4. Grafos.

## **Parte II. Algorítmica.**

1. Análisis de algoritmos.
2. Divide y vencerás.
3. Algoritmos voraces.
4. Programación dinámica.
5. Backtracking.
6. Ramificación y poda.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

1

# **PARTE I: ESTRUCTURAS DE DATOS**

## **Tema 1. Abstracciones y Especificaciones.**

- 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.
- 1.2. Especificaciones informales.
- 1.3. Especificaciones formales.
  - 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).
  - 1.3.2. Método constructivo (u operacional).

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

2

# 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.

```
290 DIM b$(22,2): FOR m=1 TO 14: FOR n=1 TO 2
300 LET s=INT (RND*22)+1
310 IF b$(s,1)=" " THEN LET b$(s,1)=g$(n,1): LET b$(s,2)=g$(n,2):
NEXT m: NEXT n: GO TO 330
320 GO TO 330
330 *INT(1/23): LET d1=0: LET i1=0: LET us=.001
340 PRINT AT 20,2;d1: IF d1=275000 THEN LET d1=350000: PRINT AT
20,2: FLASH 1;d1:"CONSEGUIDO EL PLENO EN ":i1n:" veces": PRINT
#: "Pulse una tecla para empezar": GO SUB 440: GO SUB 440: GO SUB
440: PAUSE 0: GO TO 330
350 INKEY n: IF n=22 OR n<1 THEN GO TO 350
360 IF i(n)=1 THEN GO TO 350
370 LET k=n: GO SUB 700
380 INKEY m: IF m=22 OR m<1 OR m=n THEN GO TO 380
390 IF i(m)=1 THEN GO TO 380
400 LET k=n: GO SUB 700
410 LET k=i(n)+1: IF b$(n)=b$(m) THEN LET d1=d1+25000: PAPER 3: LET
k=n: GO SUB 720: PAPER 3: LET k=n: GO SUB 720: LET k(n)=1: LET
i(m)=1: GO SUB 440: GO SUB 450: GO TO 340
420 BRIGHT 1: PAUSE m4: PAUSE 75-LET c1(n): LET c2(n): PRINT AT
i,c1$(n,8):AT i+1,c1$(n,14):AT i+2,c1$(n,20): PRINT AT
i,c1$(n,7 TO 8):AT i+1,c1$(n,13 TO 14):AT i+2,c1$(n,19 TO 20):
BEEP/.01,-10: PRINT @$(n): BEEP -.02,0
430 LET i1(n): LET c2(n): PRINT AT i,c1$(n,8):AT
i+1,c1$(n,14):AT i+2,c1$(n,20): PRINT AT i,c1$(n,7 TO 8):AT
i+1,c1$(n,13 TO 14):AT i+2,c1$(n,19 TO 20): BEEP .03,-10: PRINT
@$(n): BEEP .02,0: BRIGHT 0: GO TO 350
```

procedure ordenar(a: array;  
var b: array);

type persona;

class pila;

**Abstraer:** Eliminar lo irrelevante y quedarnos con lo realmente importante.

¿Qué es lo importante?

A.E.D.

3

# 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.

## MECANISMOS DE ABSTRACCIÓN

**Abstracción por especificación:** Sólo necesitamos conocer qué va a hacer el procedimiento y no cómo funciona.  
(Encapsulación)

**Abstracción por parametrización:** Un algoritmo, un tipo, o una variable se definen en base a unos parámetros.  
(Genericidad)

A.E.D.

4

## **1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.**

### **TIPOS DE ABSTRACCIONES**

- Abstracciones funcionales → Rutinas, funciones, procedimientos
- Abstracciones de datos → Tipos Abstractos de Datos (TAD)
- Abstracciones de iteradores → Iteradores

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

5

## **1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.**

### **TIPO ABSTRACTO DE DATOS:**

**TIPO DE DATOS:**

**ESTRUCTURA DE DATOS:**

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

6

## 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.

### Ejemplos

- **TAD:** Enteros
- **Tipo de datos:** Tipo **integer** de Pascal, o tipo **int** de C
- **Estructura de datos:** Representación mediante enteros de 16 bits, 32 bits, listas de dígitos (enteros largos), etc.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

7

## 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos

- La evolución de los lenguajes de programación tiende a introducir cada vez más abstracciones.

Lenguajes  
de bajo nivel

Lenguajes  
estructurados

Lenguajes  
orientados a objetos



(Basic, Fortran,  
Ensamblador, ...)

(Pascal, C,  
Modula, ADA, ...)

(Smalltalk, C++,  
Java, Eiffel, ...)

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

8

## 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos

- La evolución de los lenguajes de programación tiende a introducir cada vez más abstracciones.
- Soporte de TAD:
  - **Lenguajes estructurados (tipos definidos por el usuario):** Los datos y las operaciones van aparte.
  - **Lenguajes orientados a objetos (clases):** Los datos y las operaciones constituyen una unidad.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

9

## 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.

### Pascal

---

**type**

```
Pila = register
  tope: integer;
  datos: array [1..10] of integer;
end;
```

```
proc push (i: integer; var p:Pila);
```

```
proc pop (var p: Pila);
```

```
func top (p: Pila): integer;
```

### ObjectPascal

---

**type**

```
Pila = class
  private:
  tope: integer;
  datos: array [1..10] of integer;
```

```
public:
```

```
  proc push (i: integer);
```

```
  proc pop;
```

```
  func top: integer;
```

```
end;
```

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

10

## 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos

### Pascal

```
var
  p1, p2: Pila;
  i: integer;

begin
  push(10, p1);
  push(20, p1);
  pop(p1);
  i:= top(p1);
  p1.tope:= 243;
  i:= top(p1);
  ...
```

### ObjectPascal

```
var
  p1, p2: Pila;
  i: integer;

begin
  p1.push(10);
  p1.push(20);
  p1.pop;
  i:= p1.top;
  p1.tope:= 243;
  i:= p1.top;
  ...
```

→ **Error de compilación:**  
"tope" es privado

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

11

## 1.1. Abstracciones, tipos y mecanismos.

### Especificaciones: Tipos de notaciones

- Notaciones informales.
- Notaciones formales.
  - Algebraicas (o axiomáticas).
  - Operacionales (o constructivas).

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

12

## 1.2. Especificaciones informales.

### 1.2.1. Abstracciones funcionales.

#### Notación

**Operación** <nombre> (**ent** <id>: <tipo>; <id>: <tipo>, ..., **sal** <tipo>)

**Requiere:** Establece restricciones de uso.

**Modifica:** Identifica los datos de entrada que se modifican (si existe alguno).

**Calcula:** Descripción textual del comportamiento de la operación.

## 1.2. Especificaciones informales.

### 1.2.1. Abstracciones funcionales.

**Ejemplo 1:** Eliminar la repetición en los elementos de un array.

**Operación** QuitarDuplic (**ent**  $a$ : array [entero])

**Modifica:**  $a$

**Calcula:** Quita los elementos repetidos de  $a$ . El límite inferior del array no varía, pero sí lo puede hacer el superior.

**Ejemplo 2:** Buscar un elemento en un array de enteros.

**Operación** Buscar (**ent**  $a$ : array [entero];  $x$ : entero; **sal**  $i$ : entero)

**Requiere:**  $a$  debe estar ordenado de forma ascendente.

**Calcula:** Si  $x$  está en  $a$ , entonces  $i$  debe contener el valor del índice de  $x$  tal que  $a[i] = x$ . Si  $x$  no está en  $a$ , entonces  $i = \text{sup} + 1$ , donde  $\text{sup}$  es el índice superior del array  $a$ .

## 1.2.1. Abstracciones funcionales.

**Generalización:** una operación está definida independientemente de cual sea el tipo de sus parámetros.

**Ejemplo 3:** Eliminar la repetición en los elementos de un array.

**Operación** QuitarDuplic [T: tipo](ent a: array [T])

**Requiere:** T debe tener una operación de comparación MenorQue(ent T, T; sal booleano).

**Modifica:** a

**Calcula:** Quita los elementos repetidos de a. El límite inferior del array no varía, pero sí lo puede hacer el superior.

**Ejemplo 4:** Buscar un elemento en un array de enteros.

**Operación** Buscar [T: tipo](ent a: array [T]; x: T; sal i: entero)

**Requiere:** T debe tener dos operación de comparación MenorQue(ent T, T; sal bool), Igual(ent T, T; sal bool). a debe estar ordenado de forma ascendente.

**Calcula:** Si x está en a, entonces i debe contener ...

A.E.D.

15

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

## 1.2.1. Abstracciones funcionales.

- Ejemplo de especificación informal de funciones:

### Especificación OpenCV

The image shows a screenshot of the OpenCV documentation for the `cvEllipse` function. The window title is "Open CV.eps - GSview". The menu bar includes "Archivo", "Editar", "Opciones", "Ver", "Orientación", "Formatos", and "Ayuda".

Annotations on the left side of the screenshot point to specific parts of the documentation:

- Nombre de la operación:** Points to the function name `cvEllipse`.
- Descripción corta:** Points to the short description: "Draws simple or thick elliptic arc or fills ellipse sector."
- Sintaxis:** Points to the function signature: `void cvEllipse( IplImage* img, CvPoint center, CvSize axes, double angle, double start_angle, double end_angle, int color, int thickness=1 );`
- Explicación de los parámetros:** Points to a list of parameters and their descriptions:
  - `img`: Image.
  - `center`: Center of the ellipse.
  - `axes`: Length of ellipse axes.
  - `angle`: Rotation angle.
  - `start_angle`: Starting angle of the elliptic arc.
  - `end_angle`: Ending angle of the elliptic arc.
  - `color`: Ellipse color (RGB) or brightness (grayscale image).
  - `thickness`: Thickness of the ellipse arc.
- Descripción detallada:** Points to the "Discussion" section, which states: "The function `cvEllipse` draws a simple or thick elliptic arc or fills an ellipse sector. The arc is clipped by ROI rectangle. Generalized Bresenham algorithm for conic section is used for simple elliptic arcs here, and piecewise-linear approximation is used for antialiased arcs and thick arcs. All the angles are given in degrees. The meaning of parameters is shown in Figure 26-1:"

A.E.D.

16

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

## 1.2. Especificaciones informales.

### 1.2.2. Abstracciones de datos.

#### Notación

**TAD** <nombre\_tipo> **es** <lista\_operaciones>

#### Descripción

Descripción textual del tipo

#### Operaciones

Especificación informal de las operaciones de la lista anterior

**Fin** <nombre\_tipo>.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

17

### 1.2.2. Abstracciones de datos.

**TAD** CjtoEnteros **es** Vacío, Insertar, Suprimir, Miembro, EsVacío, Unión, Intersección, Cardinalidad

#### Descripción

Los CjtoEnteros son conjuntos matemáticos modificables, que almacenan valores enteros.

#### Operaciones

**Operación** Vacío (**sal** CjtoEnteros)

**Calcula:** Devuelve un conjunto de enteros vacío.

**Operación** Insertar (**ent** c: CjtoEnteros; x: entero)

**Modifica:** c.

**Calcula:** Añade x a los elementos de c. Después de la inserción, el nuevo conjunto es  $c \cup \{x\}$ .

...

**Fin** CjtoEnteros.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

18

## 1.2.2. Abstracciones de datos.

**TAD** ListaEnteros **es** Crear, Insertar, Primero, Ultimo, Cabeza, Cola, EsVacio, Igual

### Descripción

Las ListaEnteros son listas de enteros modificables. Las listas se crean con las operaciones Crear e Insertar...

### Operaciones

**Operación** Crear (**sal** ListaEnteros)

**Calcula:** Devuelve una lista de enteros vacía.

**Operación** Insertar (**ent** /: ListaEnteros; x: entero)

**Modifica:** /.

**Calcula:** Añade x a la lista / en la primera posición.

...

**Fin** ListaEnteros.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

19

## 1.2.2. Abstracciones de datos.

- **Generalización (parametrización de tipo):** El tipo se define en función de otro tipo pasado como parámetro.
- Útil para definir tipos **contenedores** o **colecciones**. P. ej. Listas, pilas, colas, arrays, conjuntos, etc.
- En lugar de:  
ListaEnteros  
ListaCadenas  
ListaReales  
....  
• Tenemos:  
Lista[T]
- Instanciación: Lista[entero], Lista[cadena],...

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

20

## 1.2.2. Abstracciones de datos.

**TAD** Conjunto[T: tipo] es Vacío, Insertar, Suprimir, Miembro, EsVacío, Unión, Intersección, Cardinalidad

### Descripción

Los Conjunto[T] son conjuntos matemáticos modificables, que almacenan valores de tipo T.

### Operaciones

**Operación** Vacío (**sal** Conjunto[T])

...

**Operación** Insertar (**ent** c: Conjunto[T]; x: T)

...

**Operación** Suprimir (**ent** c: Conjunto[T]; x: T)

...

**Operación** Miembro (**ent** c: Conjunto[T]; x: T; **sal** booleano)

...

**Fin** Conjunto.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

21

## 1.2.2. Abstracciones de datos.

**TAD** Lista[T] es Crear, Insertar, Primero, Ultimo, Cabeza, Cola, EsVacío, Igual

### Descripción

Las Lista[T] son listas modificables de valores de tipo T. Las listas se crean con las operaciones Crear e Insertar...

### Operaciones

**Operación** Crear (**sal** Lista[T])

...

**Operación** Insertar (**ent** l: Lista[T]; x: entero)

...

**Operación** Primero (**ent** l: Lista[T]; **sal** Lista[T])

...

**Fin** Lista.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

22

## 1.2.2. Abstracciones de datos.

- En C++ es posible definir tipos parametrizados.
- Plantillas **template**:

```
template <class T>
class Pila {
    private:
        int tope;
        int maxDatos;
        T *datos;
    public:
        Pila (int maximo);
        Push (T valor);
        T Pop ();
}
```

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

23

## 1.2. Especificaciones informales.

### 1.2.3. Abstracciones de iteradores.

- **Ejemplo:** Sobre el TAD CjtoEnteros queremos añadir operaciones para calcular la suma, el producto, ...

**Operación** suma\_conj (**ent** c: CjtoEnteros; **sal** entero)

**Calcula:** Devuelve la suma de los elementos de c.

....

**Operación** producto\_conj (**ent** c: CjtoEnteros; **sal** entero)

....

**Operación** varianza\_conj (**ent** c: CjtoEnteros; **sal** real)

....

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

24

### 1.2.3. Abstracciones de iteradores.

- Necesitamos abstracciones de la forma:
  - para cada** elemento  $i$  del conjunto  $A$   
**hacer** acción sobre  $i$
  - para cada** elemento  $i$  de la lista  $L$   
**hacer** acción sobre  $i$
  - para cada**  $i$  de la cola  $C$  **tal que**  $P(i)$   
**hacer** acción sobre  $i$
- $D :=$  **Seleccionar** todos los  $i$  de  $C$  **tal que**  $P(i)$
- Abstracción de **iteradores**: permiten definir un recorrido abstracto sobre los elementos de una colección.

### 1.2.3. Abstracciones de iteradores.

- La abstracción de iteradores no es soportada por los lenguajes de programación.
- **Posibles definiciones:**
  - Como una abstracción funcional:

**Iterador** ParaTodoHacer [T: tipo] (**ent** C: Conjunto[T]; *accion*: Operacion)

**Requiere:** *accion* debe ser una operación que recibe un parámetro de tipo T y no devuelve nada, *accion(ent T)*.

**Calcula:** Recorre todos los elementos  $c$  del conjunto  $C$ , aplicando sobre ellos la operación *accion(c)*.

### 1.2.3. Abstracciones de iteradores.

– Como una abstracción de datos:

**Tipoliterador** IteradorPreorden [T: tipo] **es** Iniciar, Actual, Avanzar, EsUltimo

#### Descripción

Los valores de tipo IteradorPreorden[T] son iteradores definidos sobre árboles binarios de cualquier tipo T. Los elementos del árbol son devueltos en preorden. El iterador se debe inicializar con Iniciar.

#### Operaciones

**Operación** Iniciar (**ent** A: ArbolBinario[T]; **sal** IteradorPreorden)

**Calcula:** Devuelve un iterador nuevo, colocado sobre la raíz de A.

**Operación** Actual (**ent** *iter*: IteradorPreorden; **sal** T)

...

**Fin** IteradorPreorden.

### 1.2.3. Abstracciones de iteradores.

```
var
  A: ArbolBinario[T];
  i: IteradorPreorden[T];
begin
  ...
  i:= Iniciar(A);
  while Not EsUltimo(i) do begin
    Acción sobre Actual(i);
    i:= Avanzar(i);
  end;
  ...
```

### 1.3. Especificaciones formales.

- Las especificaciones en lenguaje natural son ambiguas e imprecisas.
- **Especificaciones formales:** definen un TAD o una operación de manera precisa, utilizando un lenguaje matemático.
- Ventajas de una especificación formal:
  - **Prototipado.** Las especificaciones formales pueden llegar a ser ejecutables.
  - **Corrección del programa.** Verificación automática y formal de que el programa funciona correctamente.
  - **Reusabilidad.** Posibilidad de usar la especificación formal en distintos ámbitos.

### 1.3. Especificaciones formales.

#### Notación

La descripción formal constará de cuatro partes:

- **NOMBRE.** Nombre genérico del TAD.
- **CONJUNTOS.** Conjuntos de datos que intervienen en la definición.
- **SINTAXIS.** Signatura de las operaciones definidas.
- **SEMÁNTICA.** Indica el significado de las operaciones, cuál es su resultado.

## 1.3. Especificaciones formales.

- **Sintaxis:**

<nombre\_operación> : <conj\_dominio> → <conj\_resultado>

- Los distintas notaciones formales difieren en la forma de definir la semántica:
  - **Método axiomático o algebraico.** Se establece el significado de las operaciones a través de relaciones entre operaciones (*axiomas*). Significado implícito de las operaciones.
  - **Método constructivo u operacional.** Se define cada operación por sí misma, independientemente de las otras, basándose en un modelo subyacente. Significado explícito de las operaciones.

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- La semántica de las operaciones se define a través de un conjunto de **axiomas**.
- Un axioma es una regla que establece la igualdad de dos expresiones:

<Expresión 1> = <Expresión 2>

- Por ejemplo:

Suma (dos, dos) = Producto (dos, dos)

Tope (Push (x, pila)) = x

And (verdadero, b) = verdadero

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- ¿Qué axiomas introducir en la semántica?
- Los axiomas deben ser los necesarios para satisfacer dos propiedades:
  - **Compleitud:** Los axiomas deben ser los suficientes para poder deducir el significado de cualquier expresión.
  - **Corrección:** A partir de una expresión sólo se puede obtener un resultado.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

33

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- **Ejemplo:** TAD Natural de los números naturales.

#### NOMBRE

Natural

#### CONJUNTOS

N Conjunto de naturales

B Conjunto de booleanos {true, false}

#### SINTAXIS

cero:  $\rightarrow N$

sucesor:  $N \rightarrow N$

esCero:  $N \rightarrow B$

igual:  $N \times N \rightarrow B$

suma:  $N \times N \rightarrow N$

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

34

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

#### SEMANTICA

$\forall m, n \in \mathbb{N}$

1. esCero (cero) = true
2. esCero (sucesor (n)) = false
3. igual (cero, n) = esCero (n)
4. igual (sucesor (n), cero) = false
5. igual (sucesor (n), sucesor (m)) = igual (n, m)
6. suma (cero, n) = n
7. suma (sucesor (m), n) = sucesor (suma (m, n))

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- **Ejecución de una especificación algebraica:**  
aplicar sucesivamente las reglas de la semántica hasta que no se puedan aplicar más.
- **Ejemplo.** ¿Cuánto valen las siguientes expresiones?
  - a) suma (suma(sucesor(cero), cero), sucesor (cero) )
  - b) igual (sucesor (sucesor (cero)), suma (suma (sucesor (cero), cero), sucesor (cero) ) )

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- Supongamos un TAD,  $T$ .
- **Tipos de operaciones:**
  - **Constructores.** Conjunto mínimo de operaciones del TAD, a partir del cual se puede obtener cualquier valor del tipo  $T$ .  
$$\underline{c1}: \rightarrow T, \underline{c2}: V \rightarrow T, \underline{c3}: V_1x...xV_n \rightarrow T$$
  - **Modificación.** A partir de un valor del tipo obtienen otro valor del tipo  $T$ , y no son constructores.  
$$\underline{m1}: T \rightarrow T, \underline{m2}: TxV \rightarrow T, \underline{m3}: V_1x...xV_n \rightarrow T$$
  - **Consulta.** Devuelven un valor que no es del tipo  $T$ .  
$$\underline{o1}: T \rightarrow V, \underline{o2}: TxV \rightarrow V', \underline{o3}: V_1x...xV_n \rightarrow V_{n+1}$$

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- La ejecución de una expresión acaba al expresarla en función de los constructores.
- ¿Cómo garantizar que una especificación es completa y correcta?
- Definir los axiomas suficientes para relacionar las operaciones de modificación y consulta con los constructores.
- No incluir axiomas que se puedan deducir de otros existentes.

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- **Ejemplo:** Especificación del TAD genérico pila.

#### NOMBRE

Pila [T]

#### CONJUNTOS

S Conjunto de pilas

T Conjunto de elementos que pueden ser almacenados

B Conjunto de booleanos {true, false}

#### SINTAXIS

crearPila:  $\rightarrow$  S

esVacía: S  $\rightarrow$  B

pop: S  $\rightarrow$  S

tope: S  $\rightarrow$  T

push: T x S  $\rightarrow$  S

A.E.D.

39

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- En el caso de **tope: S  $\rightarrow$  T**, ¿qué pasa si la pila está vacía?
- Se puede añadir un conjunto de mensajes en **CONJUNTOS**, de la forma:

M Conjunto de mensajes {"Error. La pila está vacía"}

- Y cambiar en la parte de **SINTAXIS** la operación **tope:**

tope: S  $\rightarrow$  T U M

A.E.D.

40

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

	crearPila	push (t, s)
esVacía ( )	esVacía(crearPila) =	esVacía(push(t, s)) =
pop ( )	pop(crearPila) =	pop(push(t, s)) =
tope ( )	tope(crearPila) =	tope(push(t, s)) =

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

#### SEMANTICA

$\forall t \in T; \forall s \in S$

1. esVacía (crearPila) = true
2. esVacía (push (t, s)) = false
3. pop (crearPila) = crearPila
4. pop (push (t, s)) = s
5. tope (crearPila) = "Error. La pila está vacía"
6. tope (push (t, s)) = t

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- Calcular:
  - a) `pop(push(3, push(2, pop(crearPila))))`
  - b) `tope(pop(push(1, push(2, crearPila))))`
- Añadir una operación **Igual** para comparar dos pilas.
- Modificar la operación **pop**, para que devuelva un error si la pila está vacía.
- ¿Cómo hacer que la operación **pop** devuelva el tope de la pila y al mismo tiempo lo saque de la pila?

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

43

### 1.3.1. Método axiomático (o algebraico).

- Para facilitar la escritura de la expresión del resultado en la semántica, se pueden emplear condicionales de la forma:  
**SI** <condición>  $\Rightarrow$  <valor si cierto> | <valor si falso>
- **Ejemplo:** Especificación algebraica del TAD bolsa.

#### NOMBRE

Bolsa[l]

#### CONJUNTOS

S Conjunto de bolsas

l Conjunto de elementos

B Conjunto de booleanos {true, false}

N Conjunto de naturales

#### SINTAXIS

bolsaVacía:  $\rightarrow$  S

poner: S x l  $\rightarrow$  S

esVacía: S  $\rightarrow$  B

cuántos: S x l  $\rightarrow$  N

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

44

### **1.3.1. Método axiomático (o algebraico).**

- Incluir una operación quitar, que saque un elemento dado de la bolsa.
- ¿Y si queremos que los saque todos?
- Incluir una operación Igual, de comparación de bolsas.

### **1.3.1. Método axiomático (o algebraico).**

#### **Conclusiones:**

- Las operaciones no se describen de manera explícita, sino **implícitamente** relacionando el resultado de unas con otras.
- La construcción de los axiomas se basa en un **razonamiento inductivo**.
- ¿Cómo se podría especificar, por ejemplo, un procedimiento de ordenación?

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- Para cada operación, se establecen las precondiciones y las postcondiciones.
- **Precondición:** Relación que se debe cumplir con los datos de entrada para que la operación se pueda aplicar.
- **Postcondición:** Relaciones que se cumplen después de ejecutar la operación.

### 1.3.2. Método constructivo (operacional). Notación

En la semántica, para cada operación <nombre>:

**pre-<nombre>**(<param\_entrada>):= <condición\_lógica>

**post-<nombre>**(<param\_entrada>;<param\_salida>):=  
<condición\_lógica>

- **Ejemplo:** operación **máximo**, que tiene como entrada dos números reales y da como salida el mayor de los dos.

**máximo:**  $\mathbf{R \times R \rightarrow R}$  (SINTAXIS)

**pre-máximo**(x, y) ::= true (SEMANTICA)

**post-máximo**(x, y; r) ::=  $(r \geq x) \wedge (r \geq y) \wedge (r=x \vee r=y)$

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- **Ejemplo:** operación **máximo** sobre números reales, pero restringida a números positivos.

**máximop:**  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**pre-máximop**( $x, y$ ) ::=  $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$

**post-máximop**( $x, y; r$ ) ::=  $(r \geq x) \wedge (r \geq y) \wedge (r=x \vee r=y)$

- ¿Qué sucedería si  $x$  o  $y$  no son mayores que 0?
- No se cumple la precondición  $\rightarrow$  No podemos asegurar que se cumpla la postcondición.

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

49

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- **Implementación** en C++ de pre- y post-condiciones.

**máximop:**  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**pre-máximop**( $x, y$ ) ::=  $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$

**post-máximop**( $x, y; r$ ) ::=  $(r \geq x) \wedge (r \geq y) \wedge (r=x \vee r=y)$

```
float maximop (float x, float y)
{
    assert(x >= 0 && y >= 0); // Precondición
    double r;
    if (x > y) r = x; else r = y;
    assert(r >= x && r >= y && (r == x || r == y)); // Postcond
    return r;
}
```

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

50

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- **Otra posibilidad:** Definir un conjunto **M** (de mensajes de error) y cambiar la imagen. Modificar la sintaxis y la semántica:

**máximop2:  $R \times R \rightarrow R \cup M$**

**pre-máximop2**(x, y) ::= true

**post-máximop2**(x, y; r) ::=  $SI (x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$

$\Rightarrow (r \geq x) \wedge (r \geq y) \wedge (r=x \vee r=y)$

| r = "Fuera de rango"

- ¿Cuál es la mejor opción?

A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

51

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- ¿Cuál es la mejor solución?
- **La especificación como un contrato.**
- **Contrato de una operación:**  
Si se cumplen unas condiciones en los parámetros de entrada, entonces garantiza una obtención correcta del resultado.



A.E.D.

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

52

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- Dos puntos de vista del contrato (especificación):
  - **Implementador. Obligación:** Cumplir la postcondición.  
**Derechos:** Sabe que se cumple la precondition.
  - **Usuario. Obligación:** Cumplir la precondition.  
**Derechos:** Sabe que se cumple la postcondición.
- **Idea:**
  - La operación no trata todos los casos de error, sino que hace uso de las precondiciones.
  - La responsabilidad de comprobar la precondition es del que usa la operación.

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- ¿Cómo se pueden definir las pre/post-condiciones cuando el TAD es más complejo? Por ejemplo, para TAD colecciones.
- Necesitamos un **modelo subyacente**, en el cual se base la definición del TAD.
- No siempre se encuentra uno adecuado...
- **Ejemplo:** Para definir el TAD **Pila[T]**, definiremos el TAD **Lista[T]** por el método axiomático, y luego lo usaremos para definir el TAD pila con el método constructivo.

## 1.3.2. Método constructivo (operacional).

### NOMBRE

Lista[l]

### CONJUNTOS

- L Conjunto de listas
- I Conjunto de elementos
- B Conjunto de booleanos {true, false}
- N Conjunto de naturales
- M Conjunto de mensajes {"La lista está vacía"}

### SINTAXIS

crearLista:            →    L  
formarLista: I        →    L  
concatenar: L x L    →    L  
último:               L    →    I U M  
cabecera:            L    →    L  
primero:             L    →    I U M  
cola:                 L    →    L  
longitud:            L    →    N  
esListaVacía: L     →    B

A.E.D.

55

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

## 1.3.2. Método constructivo (operacional).

### SEMANTICA

$\forall i \in I; \forall a, b \in L$

1. último (crearLista) = "La lista está vacía"
2. último (formarLista (i)) = i
3. último (concatenar (a, b)) = SI esListaVacía (b)  $\Rightarrow$   
último (a) | último (b)
4. cabecera (crearLista) = crearLista
5. cabecera (formarLista (i)) = crearLista
6. cabecera (concatenar (a, b)) = SI esListaVacía (b)  $\Rightarrow$   
cabecera (a) | concatenar (a, cabecera (b))
7. primero (crearLista) = "La lista está vacía"
8. primero (formarLista (i)) = i
9. primero (concatenar (a, b)) = SI esListaVacía (a)  $\Rightarrow$   
primero (b) | primero (a)

A.E.D.

56

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

10. cola (crearLista) = crearLista
11. cola (formarLista (i)) = crearLista
12. cola (concatenar (a, b)) = SI esListaVacía (a)  $\Rightarrow$   
cola (b) | concatenar (cola (a), b)
13. longitud (crearLista) = cero
14. longitud (formarLista (i)) = sucesor (cero)
15. longitud (concatenar (a, b)) = suma (longitud (a),  
longitud (b))
16. esListaVacía (crearLista) = true
17. esListavacía (formarLista (i)) = false
18. esListaVacía (concatenar (a, b)) = esListaVacía (a)  
AND esListaVacía(b)

**Aserto invariante:** siempre que aparezca un mensaje a la entrada de una operación, la salida será el mismo mensaje.

A.E.D.

57

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- Seguimos el ejemplo y aplicamos el método constructivo a la definición de **Pila[I]**, teniendo como modelo subyacente el tipo **Lista[I]**.

#### NOMBRE

Pila[I]

#### CONJUNTOS

S Conjunto de pilas

I Conjunto de elementos

B Conjunto de valores booleanos {true, false}

M Conjunto de mensajes {"La pila está vacía"}

#### SINTAXIS

crearPila:  $\rightarrow$  S

tope: S  $\rightarrow$  I U M

pop: S  $\rightarrow$  S U M

push: I x S  $\rightarrow$  S

esVacíaPila: S  $\rightarrow$  B

A.E.D.

58

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.



### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

#### SEMANTICA

$\forall i, t \in I; \forall s, r, p \in S; \forall b \in B$

1. pre-crearPila () ::= true
2. post-crearPila (s) ::= s = crearLista
3. pre-tope (s) ::= NOT esListaVacía (s)
4. post-tope (s; t) ::= t = primero (s)
5. pre-pop (s) ::= NOT esListaVacía (s)
6. post-pop (s; p) ::= p = cola (s)
7. pre-push (i, s) ::= true
8. post-push (i, s; r) ::= r = concatenar (formarLista (i), s)
9. pre-esVacíaPila (s) ::= true
10. post-esVacíaPila (s; b) ::= b = esListaVacía (s)

A.E.D.

61

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- Seguimos el ejemplo y aplicamos el método constructivo a la definición de **Cola[I]**, teniendo como modelo subyacente el tipo **Lista[I]**.

#### NOMBRE

Cola[I]

#### CONJUNTOS

C Conjunto de colas

I Conjunto de elementos

B Conjunto de valores booleanos {true, false}

M Conjunto de mensajes {"La cola está vacía"}

#### SINTAXIS

crearCola: → C

frente: C → I U M

inserta: C → C U M

resto: I x C → C

esVacíaCola: C → B

A.E.D.

62

Tema 1. Abstracciones y especificaciones.

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

- **Ejecución de la especificación:** comprobar precondiciones y postcondiciones de todas las operaciones de la expresión.
- **Ejemplos:** Pila[Natural]
  - a) tope (push (4, pop (push (2, crearPila) ) ) )
  - b) esVacíaPila (push (2, pop (crearPila) ) )

### 1.3.2. Método constructivo (operacional).

#### Conclusiones:

- La especificación constructiva está limitada por la necesidad de **modelos subyacentes**.
- **No confundir** especificación con implementación.
- Es más fácil incluir especificaciones constructivas en los programas (p.ej., mediante asertos).