Programa de teoría

Parte I. Estructuras de Datos.

1. Abstracciones y especificaciones.
2. **Conjuntos y diccionarios.**
3. Representación de conjuntos mediante árboles.
4. Grafos.

Parte II. Algorítmica.

1. Análisis de algoritmos.
2. Divide y vencerás.
3. Algoritmos voraces.
4. Programación dinámica.
5. Backtracking.
6. Ramificación y poda.

PARTE I: ESTRUCTURAS DE DATOS

Tema 2. Conjuntos y Diccionarios.

2.1. Repaso del TAD Conjunto.
2.2. Implementaciones básicas.
2.3. El TAD Diccionario.
2.4. Las tablas de dispersión.
2.5. Relaciones muchos a muchos.

2.1. Repaso del TAD Conjunto.

Definición y propiedades.

- **Conjunto:** Colección no ordenada de elementos (o miembros) distintos.
- **Elemento:** Cualquier cosa, puede ser un elemento primitivo o, a su vez, un conjunto.

C: Conjunto de enteros

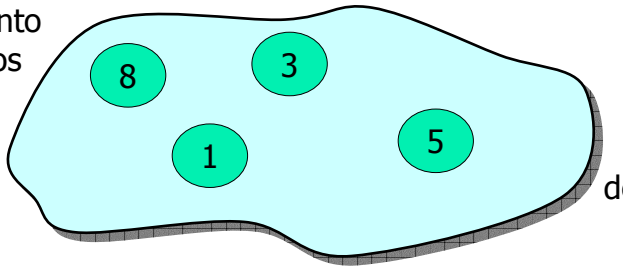


Diagrama de patata

2.1. Repaso del TAD Conjunto.

- En programación, se impone que todos los elementos sean del mismo tipo: **Conjunto[T]** (conjuntos de enteros, de caracteres, de cadenas ...)

- ¿En qué se diferencia el TAD Conjunto del TAD Lista?
- ¿En qué se diferencia el TAD Conjunto del TAD Bolsa?

2.1. Repaso del TAD Conjunto.

- Puede existir una relación de orden en el conjunto.
- **Relación "<" de orden** en un conjunto C:
  - **Propiedad transitiva**: para todo *a*, *b*, *c*, si (*a*<*b*) y (*b*<*c*) entonces (*a*<*c*).
  - **Orden total**: para todo *a*, *b*, sólo una de las afirmaciones (*a*<*b*), (*b*<*a*) o (*a*=*b*) es cierta.
- … colección no ordenada… → Se refiere al orden de inserción de los elementos.

2.1. Repaso del TAD Conjunto.

Repaso de Notación de Conjuntos.

- **Definición**:

Por extensión	Mediante proposiciones
A= {a, b, c, .., z}	C= {x | proposición de x}
B= {1, 4, 7} = {4, 7, 1}	D= {x | x es primo y menor que 90}

- **Pertenencia**: $x \in A$
- **No pertenencia**: $x \notin A$
- **Conjunto vacío**: $\emptyset$
- **Conjunto universal**: $\mathcal{U}$
- **Inclusión**: $A \subseteq B$
- **Intersección:** $A \cap B$
- **Unión**: $A \cup B$
- **Diferencia**: $A - B$

2.1. Repaso del TAD Conjunto.

Operaciones más comunes.

C: Conjunto de todos los Conjunto[T]
a, b, c $\in$ C; x $\in$ T

- Vacío : $\rightarrow$ C a:= Ø
- Unión : C x C $\rightarrow$ C c:= a $\cup$ b
- Intersección : C x C $\rightarrow$ C c:= a $\cap$ b
- Diferencia : C x C $\rightarrow$ C c:= A – B
- Combina : C x C $\rightarrow$ C c:= a $\cup$ b, con a $\cap$ b = Ø
- Miembro : T x C $\rightarrow$ B x $\in$ a

2.1. Repaso del TAD Conjunto.

Operaciones más comunes.

- Inserta : T x C $\rightarrow$ C a:= a $\cup$ {x}
- Suprime : T x C $\rightarrow$ C a:= a – {x}
- Min : C $\rightarrow$ T $\min_{\forall x \in a}(x)$
- Max : C $\rightarrow$ T $\max_{\forall x \in a}(x)$
- Igual : C x C $\rightarrow$ B a == b

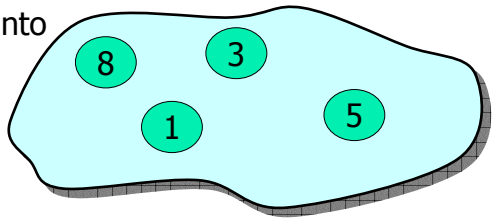
- … elementos distintos… → Si insertamos un elemento que ya pertenece, obtenemos el mismo conjunto.

2.2. Implementaciones básicas.

- **Problema:** ¿Cómo representar el tipo conjunto, de forma que las operaciones se ejecuten rápidamente, con un uso razonable de memoria?
- **Respuesta:**
- Dos tipos de **implementaciones básicas**:
  - Mediante arrays de booleanos.
  - Mediante listas de elementos.
- La mejor implementación depende de cada aplicación concreta:
  - Operaciones más frecuentes en esa aplicación.
  - Tamaño y variabilidad de los conjuntos usados.
  - Etc.

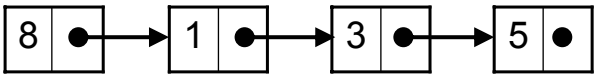
2.2. Implementaciones básicas.

C: Conjunto



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0

Array de booleanos



Lista de elementos

2.2. Implementaciones básicas.

2.2.1. Mediante arrays de booleanos.

- **Idea:** Cada elemento del conjunto universal se representa con 1 bit. Para cada conjunto concreto A, el bit asociado a un elemento vale:
  1 - Si el elemento pertenece al conjunto A
  0 - Si el elemento no pertenece a A

- **Definición**:
  tipo
  Conjunto[T] = **array** [1..Rango(T)] **de** booleano

  Donde Rango(T) es el tamaño del conj. universal.

2.2.1. Mediante arrays de booleanos.

- **Ejemplo**: T = {a, b, …, g}
  C= Conjunto[T]
  A = {a, c, d, e, g}
  B = {c, e, f, g}

a	b	c	d	e	f	g
1	0	1	1	1	0	1

A: Conjunto[a..g]

a	b	c	d	e	f	g
0	0	1	0	1	1	1

B: Conjunto[a..g]

- Unión, intersección, diferencia: se transforman en las operaciones booleanas adecuadas.

2.2.1. Mediante arrays de booleanos.

operación Unión (A, B: Conjunto[T]; **var** C: Conjunto[T])
  para cada i en Rango(T) **hacer**
    C[i]:= A[i] OR B[i]

operación Intersección (A, B: Conjunto[T]; **var** C: Conjunto[T])

operación Diferencia (A, B: Conjunto[T]; **var** C: Conjunto[T])

2.2.1. Mediante arrays de booleanos.

operación Inserta (x: T; **var** C: Conjunto[T])
  C[x]:= 1

operación Suprime (x: T; **var** C: Conjunto[T])
  C[x]:= 0

operación Miembro (x: T; C: Conjunto[T]): booleano
  devolver C[x]==1

- ¿Cuánto tardan las operaciones anteriores?
- ¿Cómo serían: Igual, Min, Max, ...?

2.2.1. Mediante arrays de booleanos.

Ventajas

- Operaciones muy sencillas de implementar.
- No hace falta usar memoria dinámica.
- El tamaño usado es **proporcional al tamaño del conjunto universal**, independientemente de los elementos que contenga el conjunto.
- ¿Ventaja o inconveniente?

2.2.1. Mediante arrays de booleanos.

- **Ejemplo**. Implementación en C, con T = {1, 2, …, 64}
  tipo
  Conjunto[T] = long long
- Unión (A, B, C) → C = A | B;
- Intersección (A, B, C) → C = A & B;
- Inserta (x, C) → C = C | (1<<(x-1));

- ¡Cada conjunto ocupa 8 bytes, y las operaciones se hacen en 1 o 3 ciclos!

2.2.1. Mediante arrays de booleanos.

- **Ejemplo**. Implementación con
  T = enteros de 32 bits = {0, 1, …, 2^{32}-1}

  tipo

  Conjunto[T] = array [4.294.967.296] de
  bits = array [536.870.912] de bytes

- ¡Cada conjunto ocupa 0.5 Gygabytes, independientemente de que contenga sólo uno o dos elementos…!
- ¡El tiempo es proporcional a ese tamaño!

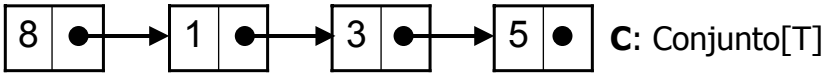
2.2.2. Mediante listas de elementos.

- **Idea**: Guardar en una lista los elementos que pertenecen al conjunto.
- **Definición**:

  tipo

  Conjunto[T] = Lista[T]

- C = {1, 5, 8, 3}



2.2.2. Mediante listas de elementos.

Ventajas:

- Utiliza espacio proporcional al tamaño del conjunto representado (no al conjunto universal).
- El conjunto universal puede ser muy grande, o incluso infinito.

Inconvenientes:

- Las operaciones son menos eficientes si el conjunto universal es reducido.
- Gasta más memoria y tiempo si los conjuntos están muy llenos.
- Más complejo de implementar.

2.2.2. Mediante listas de elementos.

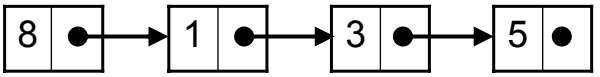
```
operación Miembro (x: T; C: Conjunto[T]): booleano
    Primero(C)
    mientras Actual(C) ≠ x AND NOT EsUltimo(C) hacer
        Avanzar(C)
    devolver Actual(C) == x

operación Intersección (A, B; Conjunto[T]; var C: Conjunto[T])
    C:= ListaVacía
    Primero(A)
    mientras NOT EsUltimo(A) hacer
        si Miembro(Actual(A), B) entonces
            InsLista(C, Actual(A))
        Avanzar(A)
    finmientras
```

2.2.2. Mediante listas de elementos.

- ¿Cuánto tiempo tardan las operaciones anteriores? Suponemos una lista de tamaño **n** y otra **m** (o ambas de tamaño **n**).
- ¿Cómo sería Intersección, Diferencia, Inserta, Suprime, etc.?
- **Inconveniente:** Unión, Intersección y Diferencia recorren la lista B muchas veces (una por cada elemento de A).
- Se puede mejorar usando listas ordenadas.

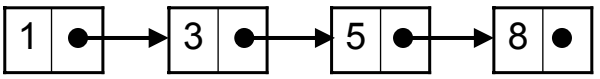
2.2.2. Mediante listas de elementos.

- Listas no ordenadas.



C: Conjunto[T]

- Listas ordenadas.

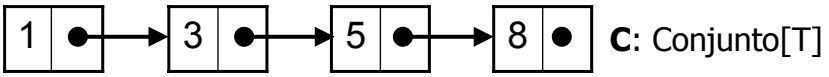


C: Conjunto[T]

- **Miembro, Inserta, Suprime**: Parar si encontramos un elemento mayor que el buscado.
- **Unión**, **Intersección**, **Diferencia**: Recorrido simultáneo (y único) de ambas listas.

2.2.2. Mediante listas de elementos.

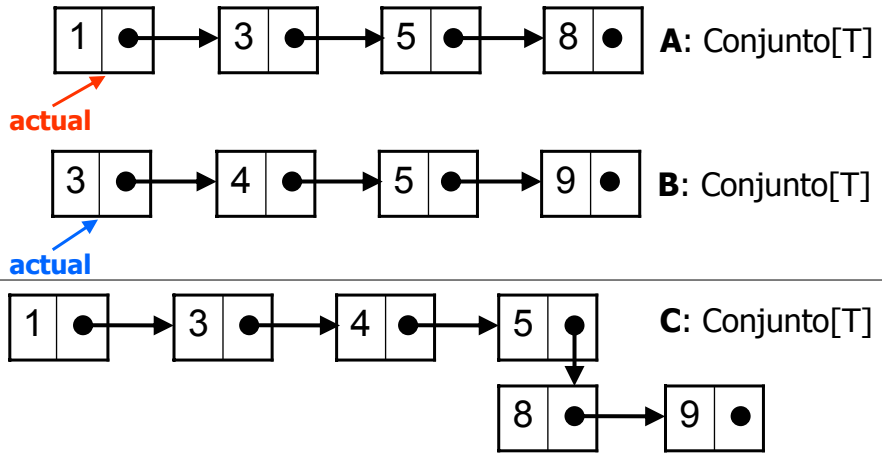
operación Miembro (x: T; C: Conjunto[T]): booleano
  Primero(C)
  mientras Actual(C) < x AND NOT EsUltimo(C) **hacer**
    Avanzar(C)
  devolver Actual(C) == x



- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución ahora?

2.2.2. Mediante listas de elementos.

- Unión: Idea parecida al procedimiento de mezcla, en la ordenación por mezcla.



2.2.2. Mediante listas de elementos.

```
operación Unión (A, B; Conjunto[T]; var C: Conjunto[T])
    C:= ListaVacía
    Primero(A)
    Primero(B)
    mientras NOT (EsUltimo(A) AND EsUltimo(B)) hacer
        si EsUltimo(B) OR Actual(A)<Actual(B) entonces
                InsLista(C, Actual(A))
                Avanza(A)
        sino si EsUltimo(A) OR Actual(B)<Actual(A) entonces
                InsLista(C, Actual(B))
                Avanza(B)
        sino
                InsLista(C, Actual(A))
                Avanza(A)
                Avanza(B)
        finsi
    finmientras
```


2.2.2. Mediante listas de elementos.

- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución? ¿Es sustancial la mejora?
- ¿Cómo serían la Intersección y la Diferencia?
- ¿Cómo serían las operaciones Min, Max?
- ¿Cuánto es el uso de memoria para tamaño **n**? Supongamos que 1 puntero = k_1 bytes, 1 elemento = k_2 bytes.

2.2. Implementaciones básicas.

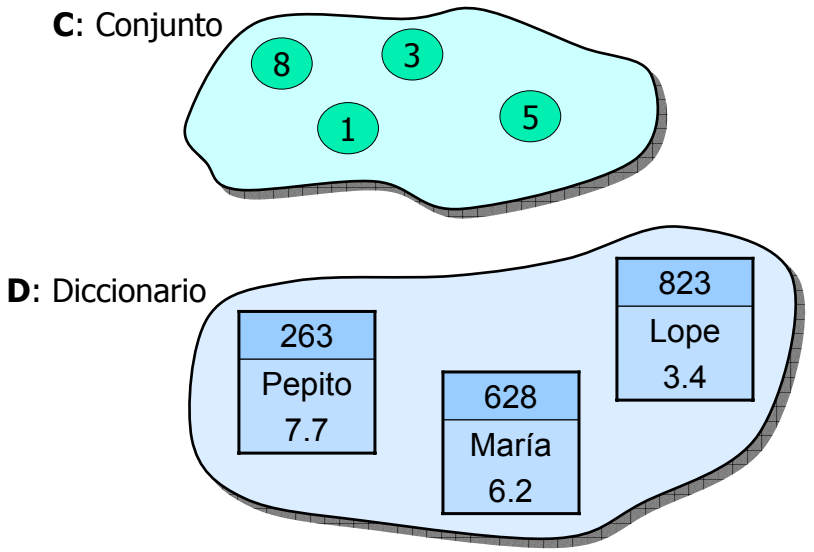
Conclusiones

- **Arrays de booleanos**: muy rápida para las operaciones de inserción y consulta.
- Inviable si el tamaño del conjunto universal es muy grande.
- **Listas de elementos**: uso razonable de memoria, proporcional al tamaño usado.
- Muy ineficiente para la inserción y consulta de un elemento.
- **Solución:** Tablas de dispersión, estructuras de árbol, combinación de estructuras, etc.

2.3. El TAD Diccionario.

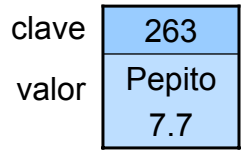
- Muchas aplicaciones usan **conjuntos** de datos, que pueden variar en tiempo de ejecución.
- Cada elemento tiene una **clave**, y asociado a ella se guardan una serie de **valores**.
- Las operaciones de **consulta son por clave**.
- **Ejemplos.** Agenda electrónica, diccionario de sinónimos, base de datos de empleados, notas de alumnos, etc.
- Normalmente, no son frecuentes las operaciones de unión, intersección o diferencia, sino inserciones, consultas y eliminaciones.

2.3. El TAD Diccionario.



2.3. El TAD Diccionario.

- **Definición: Asociación**. Una asociación es un par (clave: tipo_clave; valor: tipo_valor).



- Un **diccionario** es, básicamente, un conjunto de asociaciones con las operaciones Inserta, Suprime, Miembro y Vacío.
- TAD Diccionario[tclave, tvalor]

Inserta (**clave**: tclave; **valor**: tvalor, **var D**: Diccionario[tcl,tval])
Consulta (**clave**: tclave; **D**: Diccionario[tcl,tval]): **tvalor**
Suprime (**clave**: tclave; **var D**: Diccionario[tcl,tval])
Vacío (**var D**: Diccionario[tcl,tval])

2.3. El TAD Diccionario.

- Todo lo dicho sobre implementación de conjuntos se puede aplicar (extender) a diccionarios.
- **Implementación**:
  - **Con arrays de booleanos**: ¡Imposible! Conjunto universal muy limitado. ¿Cómo conseguir la asociación clave-valor?
  - **Con listas de elementos**: Representación más compleja y muy ineficiente para inserción, consulta, etc.
- Representación sencilla **mediante arrays**.

```
tipo
  Diccionario[tclave, tvalor] = registro
     último: entero
     datos: array [1..máximo] de Asociacion[tclave, tvalor]
  finregistro
```


2.3. El TAD Diccionario.

```
operación Vacío (var D: Diccionario[tclave, tvalor])
        D.último:= 0


oper Inserta (clave: tclave; valor: tvalor; var D: Diccionario[tc,tv])
        para i:= 1 hasta D.último hacer
                si  D.datos[i].clave == clave  entonces
                        D.datos[i].valor:= valor
                        acabar
        finpara
        si  D.último < máximo  entonces
                D.último:= D.último + 1
                D.datos[D.último]:= (clave, valor)
        sino
                Error ("El diccionario está lleno")
        finsi
```

2.3. El TAD Diccionario.

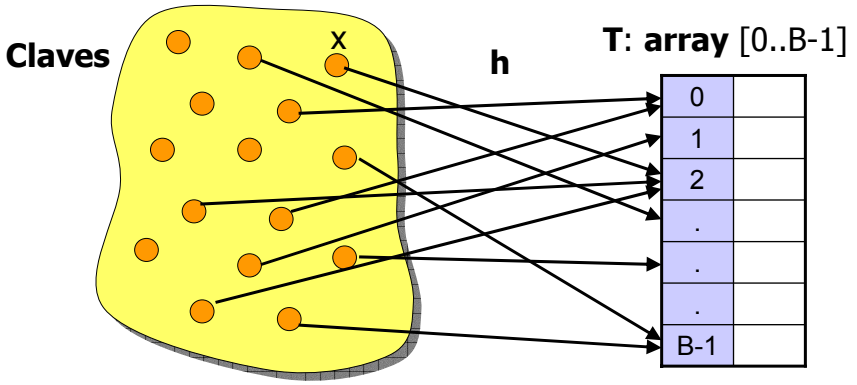
```
operación Consulta (clave: tclave; D: Diccionario[tc,tv]): tvalor
        para i:= 1 hasta D.último hacer
                si  D.datos[i].clave == clave  entonces
                        devolver D.datos[i].valor
        finpara
        devolver NULO

operación Suprime (clave: tclave; var D: Diccionario[tc,tv])
        i:= 1
        mientras (D.datos[i].clave ≠ clave) AND (i < D.último) hacer
                i:= i + 1
        finmientras
        si  D.datos[i].clave == clave  entonces
                D.datos[i]:= D.datos[D.último]
                D.último:= D.último – 1
        finsi
```


2.4. Las tablas de dispersión.

- La representación de conjuntos o diccionarios con listas o arrays tiene un tiempo de **O(n)**, para Inserta, Suprime y Miembro, con un uso razonable de memoria.
- Con vectores de bits el tiempo es **O(1)**, pero tiene muchas limitaciones de memoria.
- ¿Cómo aprovechar lo mejor de uno y otro tipo?

2.4. Las tablas de dispersión.

- **Idea**: Reservar un tamaño fijo, un array T con B posiciones (0, ..., B-1).
- Dada una clave x (sea del tipo que sea) calcular la posición donde colocarlo, mediante una función **h**.



2.4. Las tablas de dispersión.

- **Función de dispersión (hash): h**

  h : tipo_clave → [0, …, B-1]

- **Insertar (clave, valor, T)**: Aplicar **h(clave)** y almacenar en esa posición **valor**.

  T[h(clave)]= valor

- **Consultar (clave, T): valor**: Devolver la posición de la tabla en h(clave).

  devolver T[h(clave)]

- Se consigue **O(1)**, en teoría…

2.4. Las tablas de dispersión.

- **Ejemplo**. tipo_clave = entero de 32 bits.
  Fun. de disp.: h(x) = (37·x^2 + 61·x·sqrt(x)) mod B
  Más sencilla: h(x) = x módulo B
- Sea B= 10, D= {9, 25, 33, 976, 285, 541, 543, 2180}
- h(x) = x mod 10

D

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2180	**541**		**33** **543**		**25** **285**	**976**			**9**

Habemvs problema

2.4. Las tablas de dispersión.

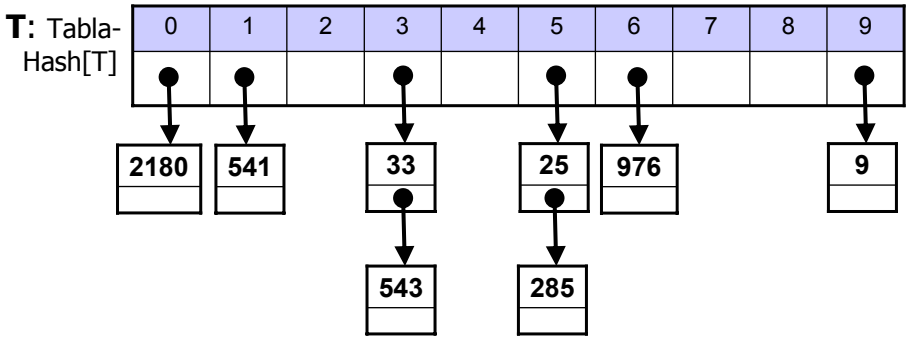
- ¿Qué ocurre si para dos elementos distintos **x** e **y**, ocurre que **h(x) = h(y)**?
- **Definición**: Si (**x** ≠ **y**) Y (**h(x) = h(y)**) entonces se dice que **x** e **y** son **sinónimos**.
- Los distintos métodos de dispersión difieren en el tratamiento de los sinónimos.
- **Tipos de dispersión (hashing):**
  - **Dispersión abierta.**
  - **Dispersión cerrada.**

2.4.1. Dispersión abierta.

- Las celdas de la tabla no son elementos (o asociaciones), sino listas de elementos, también llamadas **cubetas**.

  tipo TablaHash[T]= **array** [0..B-1] **de** Lista[T]

- Sea B= 10, D= {9, 25, 33, 976, 285, 541, 543, 2180}



2.4.1. Dispersión abierta.

- La tabla de dispersión está formada por B cubetas. Dentro de cada una están los sinónimos.
- El conjunto de sinónimos es llamado **clase**.

Eficiencia de la dispersión abierta

- El tiempo de las operaciones es proporcional al tamaño de las listas (cubetas).
- Supongamos **B** cubetas y **n** elementos en la tabla.
- Si todos los elementos se reparten uniformemente cada cubeta será de longitud: **1 + n/B**

2.4.1. Dispersión abierta.

- Tiempo de Inserta, Suprime, Consulta: **O(1+n/B)**
- **Ojo:** ¿Qué ocurre si la función de dispersión no reparte bien los elementos?

Utilización de memoria

- Si 1 puntero = k_1 bytes, 1 elemento = k_2 bytes.
- En las celdas: $(k_1 + k_2)n$
- En la tabla: k_1 B

Conclusión:

Menos cubetas: Se gasta menos memoria.
Más cubetas: Operaciones más rápidas.

2.4.2. Dispersión cerrada.

- Las celdas de la tabla son elementos del diccionario (no listas).
- No se ocupa un espacio adicional de memoria en listas.

  tipo TablaHash[tc, tv]= **array** [0..B-1] **de** (tc, tv)

- Si al insertar un elemento nuevo **x**, ya está ocupado **h(x)**, se dice que ocurre una **colisión**.
- En caso de colisión se hace **redispersión**: buscar una nueva posición donde meter el elemento **x**.

2.4.2. Dispersión cerrada.

- **Redispersión**: Si falla h(x), aplicar h1(x), h2(x), ... hasta encontrar una posición libre.
- Definir la familia de funciones hi(x).
- **Ejemplo. Redispersión lineal**:
  hi(x)= (h(x) + i) mod B
- Sea B= 10, D= {9, 25, 33, 976, 285, 541, 543, 2180}

T: Tabla-Hash

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2180	**541**		**33**	**543**	**25**	**976**	**285**		**9**

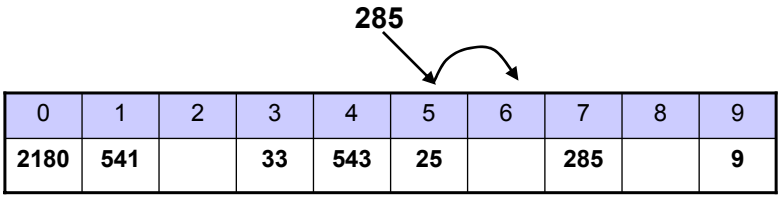
2.4.2. Dispersión cerrada.

- La secuencia de posiciones recorridas para un elemento se suele denominar **cadena** o **secuencia de búsqueda**.
- **Consultar (clave, T): valor**

```
k:= h(clave)
i:= 0;
mientras T[k].clave ≠ clave AND T[k].clave ≠ VACIO
            AND i<B hacer
    i:= i + 1
    k:= hi(clave)
finmientras
si T[k].clave == clave entonces
   devolver T[k].valor
sino devolver NULO
```

2.4.2. Dispersión cerrada.

- ¿Cómo sería la inserción?
- ¿Y la eliminación?
- **Ojo** con la eliminación.
- **Ejemplo.** Eliminar 976 y luego consultar 285.

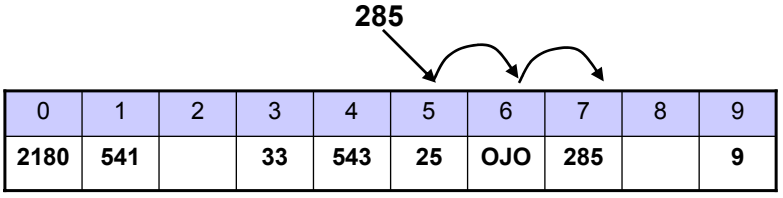


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2180	**541**		**33**	**543**	**25**		**285**		**9**

Resultado: ¡¡285 no está en la tabla!!

2.4.2. Dispersión cerrada.

- **Moraleja:** en la eliminación no se pueden romper las secuencias de búsqueda.
- **Solución.** Usar una marca especial de "elemento eliminado", para que siga la búsqueda.
- **Ejemplo.** Eliminar 976 y luego consultar 285.

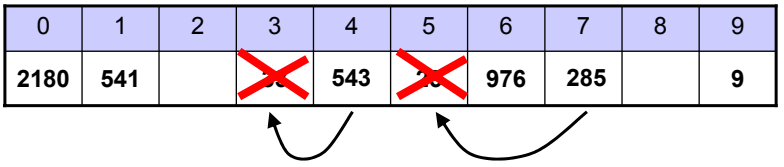


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2180	**541**		**33**	**543**	**25**	**OJO**	**285**		**9**

Resultado: ¡¡Encontrado 285 en la tabla!!

2.4.2. Dispersión cerrada.

- En la operación Consulta, la búsqueda sigue al encontrar la marca de “elemento eliminado”.
- En Inserta también sigue, pero se puede usar como una posición libre.
- **Otra posible solución.** Mover algunos elementos, cuya secuencia de búsqueda pase por la posición eliminada.
- **Ejemplo.** Eliminar 25 y luego eliminar 33.



2.4.2. Dispersión cerrada.

Utilización de memoria en disp. cerrada

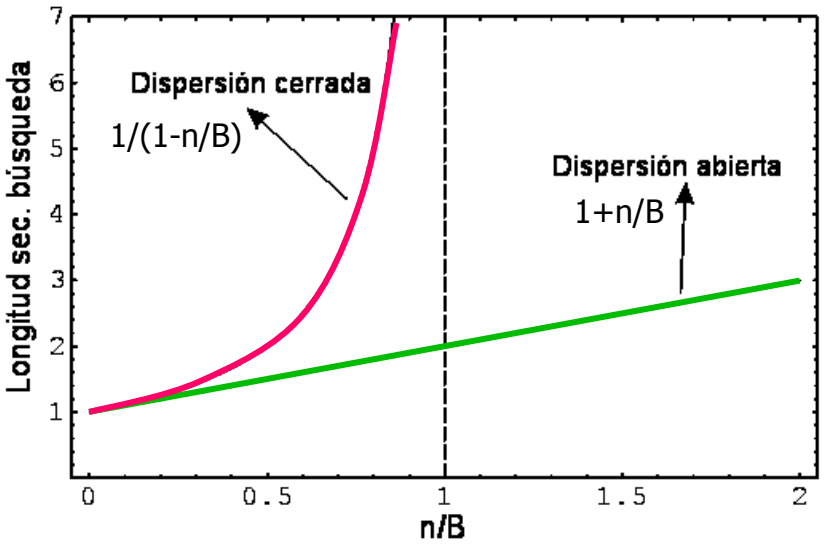
- Si 1 puntero = k_1 bytes, 1 elemento = k_2 bytes.
- Memoria en la tabla: k_2 B
- O bien: k_1 B + k_2 n
- En **dispersión abierta** teníamos: k_1 B + (k_1 + k_2)n
- ¿Cuál es mejor?

2.4.2. Dispersión cerrada.

Eficiencia de las operaciones

- La tabla nunca se puede llenar con más de B elementos.
- La probabilidad de colisión crece cuantos más elementos hayan, disminuyendo la eficiencia.
- El costo de Inserta es **O(1/(1-n/B))**
- Cuando N $\rightarrow$ B, el tiempo tiende a infinito.
- En **dispersión abierta** teníamos: **O(1+n/B)**

2.4.2. Dispersión cerrada.



2.4.2. Dispersión cerrada.

Reestructuración de las tablas de dispersión

- Para evitar el problema de la pérdida de eficiencia, si el número de elementos, **n**, aumenta mucho, se puede crear una nueva tabla con más cubetas, B, **reestructurar**.
- Dispersión abierta: reestructurar si N > 2 B
- Dispersión cerrada: reestructurar si N > 0.75 B

2.4.3. Funciones de dispersión.

- En ambos análisis se supone una “buena” función de dispersión.
- Si no es buena el tiempo puede ser mucho mayor…

- **Propiedades de una buena función de dispersión**
  - Repartir los elementos en la tabla de manera **uniforme**: debe ser lo más “aleatoria” posible.
  - La función debe ser fácil de calcular (eficiente).
  - **Ojo:** h(x) es función de x, devuelve siempre el mismo valor para un mismo valor de x.

2.4.3. Funciones de dispersión.

Ejemplos de funciones de dispersión

Sea la clave **x** un entero.

- **Método de la multiplicación.**
  $h(x) = (x*C) \bmod B$; con C y B primos entre sí
- **Método de división.**
  $h(x) = (x \bmod C) \bmod B$; con C y B primos entre sí
- **Método del centro del cuadrado.**
  $h(x) = \lfloor x^2 / 100 \rfloor \bmod B$
  $h(x) = \lfloor x^2 / C \rfloor \bmod B$
  Escoger un C, tal que $BC^2 \approx K^2$, para x en el intervalo (0, ..., K). Ej.: K= 1000; B= 8; C=354; h(456)= 3

2.4.3. Funciones de dispersión.

Sea la clave **x= $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$** un entero o cadena.

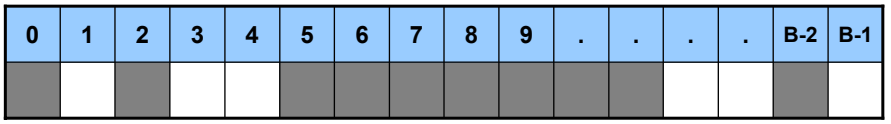
- **Método de plegado (folding).**
  $h(x) = (x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) \bmod B$
  $h(x) = (x_3 x_2 x_1 + x_6 x_5 x_4) \bmod B$
- **Método de extracción.**
  $h(x) = (x_4 x_1 x_6) \bmod B$
- **Combinación de métodos.**
  $h(x) = \lfloor (x_4 x_1 x_6)^2 / D + C(x_3 x_5 x_2) \rfloor \bmod B$
  $h(x) = (\lfloor C1*x^2 \bmod C2 \rfloor + x*C3) \bmod B$
  …

2.4.3. Funciones de redispersión.

- **Redispersión lineal.**

$$hi(x) = h(i, x) = (h(x) + i) \bmod B$$

- Es sencilla de aplicar.
- Se recorren todas las cubetas para i= 1, …, B-1.
- **Problema de agrupamiento:** Si se llenan varias cubetas consecutivas y hay una colisión, se debe consultar todo el grupo. Aumenta el tamaño de este grupo, haciendo que las inserciones y búsquedas sean más lentas.



2.4.3. Funciones de redispersión.

- **Redispersión con saltos de tamaño C.**

$$hi(x) = h(i, x) = (h(x) + C \cdot i) \bmod B$$

- Es sencilla de aplicar.
- Se recorren todas las cubetas de la tabla si C y B son primos entre sí.
- **Inconveniente:** no resuelve el problema del agrupamiento.

- **Redispersión cuadrática.**

$$h(i, x) = (h(x) + D(i)) \bmod B$$

- $D(i) = (+1, -1, +2^2, -2^2, +3^2, -3^2, \ldots)$
- Funciona cuando $B= 4k + 3$, para $k \in N$
- ¿Resuelve el problema del agrupamiento?

2.4.3. Funciones de redispersión.

- **Redispersión doble.**

  $h(i, x) = (h(x) + C(x) \cdot i) \bmod B$

- **Idea:** es como una redispersión con saltos de tamaño C(x), donde el tamaño del salto depende de x.
- Si B es un número primo, C(x) es una función:

  $C : \text{tipo\_clave} \rightarrow [1, \ldots, B-1]$

- Se resuelve el problema del agrupamiento si los sinónimos (con igual valor h(x)) producen distinto valor de C(x).

- **Ejemplo.** Sea $x = x_1x_2x_3x_4$

  $h(x) = x_1x_4 \bmod B$

  $C(x) = 1 + (x_3x_2 \bmod (B-1))$

2.4. Las tablas de dispersión.

Conclusiones:

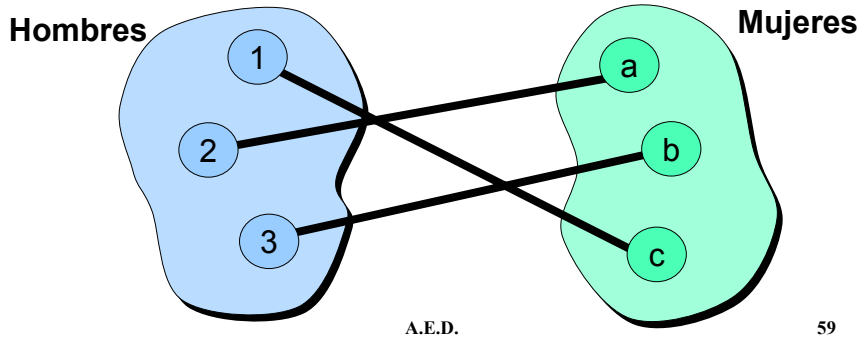
- **Idea básica:** la función de dispersión, **h**, dice dónde se debe meter cada elemento. Cada **x** va a la posición **h(x)**, en principio…
- Con suficientes cubetas y una buena función **h**, el tiempo de las operaciones sería **O(1)**.
- Una buena función de dispersión es esencial. ¿Cuál usar? Depende de la aplicación.
- Las tablas de dispersión son muy buenas para Inserta, Suprime y Consulta, pero…
- ¿Qué ocurre con Unión, Intersección, Máximo, Mínimo, listar los elementos por orden, etc.?

2.5. Relaciones muchos a muchos.

- En muchas aplicaciones se almacenan **conjuntos** de dos tipos distintos y **relaciones** entre elementos de ambos.

Tipos de relaciones:

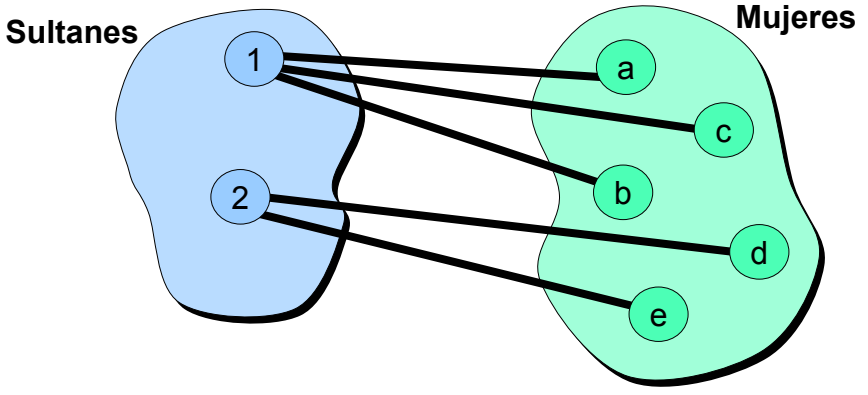
- **Relación uno a uno.** Ej. Relación marido-mujer.



2.5. Relaciones muchos a muchos.

Tipos de relaciones:

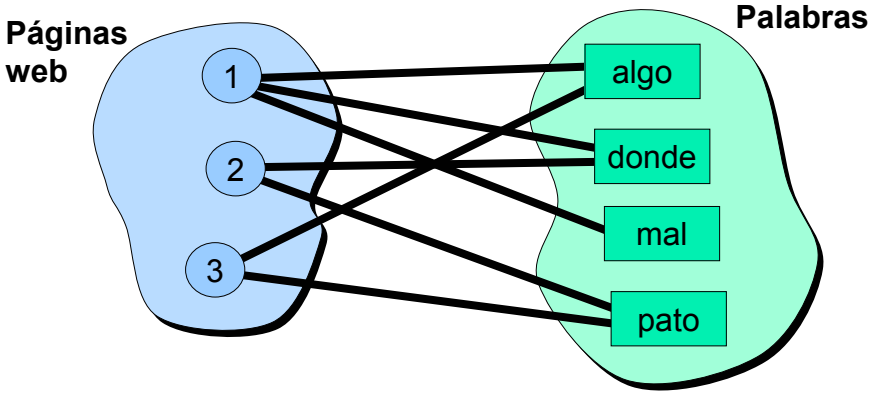
- **Relación uno a muchos.** Ej. Relación marido-mujer.



2.5. Relaciones muchos a muchos.

Tipos de relaciones:

- **Relación muchos a muchos.** Ej. Relación "contenido en".



2.5. Relaciones muchos a muchos.

- **Otros ejemplos** de relación muchos a muchos:
  - Alumnos de la universidad, cursos y matriculaciones de alumnos en cursos.
  - Personas, libros y préstamos de libros a personas.
  - Ciudades y carreteras entre ciudades.

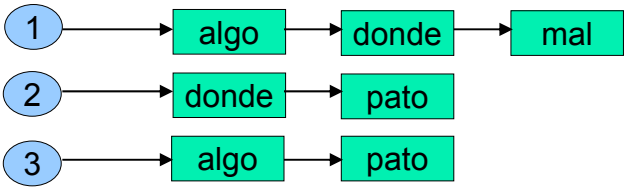
- **Cuestión:** ¿Cómo representar una relación de este tipo?
- **Objetivos:** uso de memoria razonable y tiempo de ejecución rápido.

2.5. Relaciones muchos a muchos.

- Supongamos que existen 3 mil millones de páginas ($3 \cdot 10^9$), 20 millones de palabras distintas ($2 \cdot 10^7$) y cada página tiene 30 palabras diferentes.
- En total tenemos: $3 \cdot 10^9 \cdot 30$ = 90 mil millones de relaciones ($9 \cdot 10^{10}$)
- Cada palabra aparece de media en 4.500 páginas.

2.5.1. Representaciones básicas.

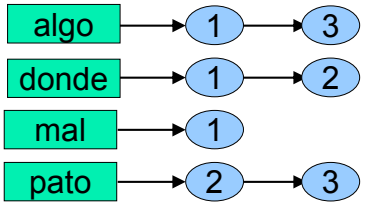
- **Opción 1:** Para cada página, almacenar una lista con las palabras que contiene (lista de punteros a palabras).



- Sea k_1 = tamaño de 1 puntero = 8 bytes
- Uso de memoria: $2 \cdot k_1 \cdot 9 \cdot 10^{10}$ bytes = 1,44 Terabytes
- **Buscar palabras en una página dada:** recorrer (de media) 10 asociaciones.
- **Buscar páginas dada una palabra:** habría que recorrer las $9 \cdot 10^{10}$ asociaciones. **Muy ineficiente.**

2.5.1. Representaciones básicas.

- **Opción 2:** Para cada palabra, almacenar una lista con las páginas donde aparece (lista de identificadores).



- Sea k_1 = tamaño de 1 puntero o identificador = 8 bytes
- Uso de memoria: $2 \cdot k_1 \cdot 9 \cdot 10^{10}$ bytes = 1,44 Terabytes
- **Buscar páginas dada una palabra:** recorrer (de media) 4500 asociaciones.
- **Buscar palabras en una página dada:** habría que recorrer las $9 \cdot 10^{10}$ asociaciones. **Muy ineficiente.**

2.5.1. Representaciones básicas.

- **Opción 3:** Matriz de booleanos. Una dimensión para las páginas y otra para las palabras.

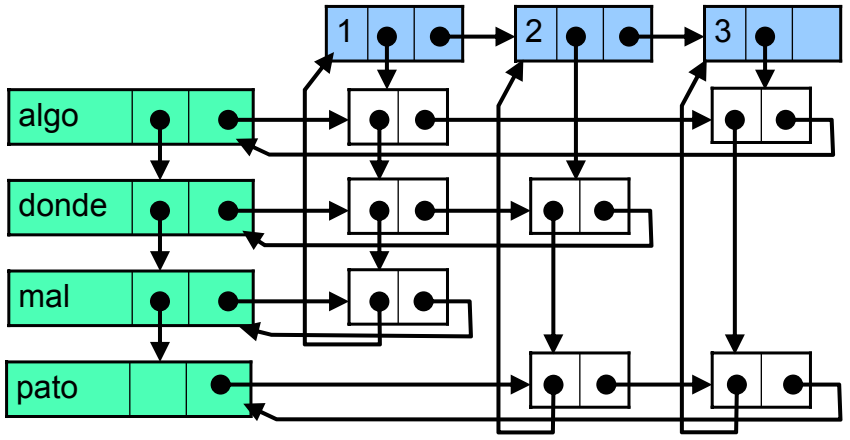
	1	2	3
algo	X		X
donde	X	X	
mal	X		
pato		X	X

- Uso de memoria: $3 \cdot 10^9$ x $2 \cdot 10^7$ bits = $6/8 \cdot 10^{16}$ bytes = ¡¡75.000 Terabytes!! ¡¡50.000 veces más memoria!!
- Sólo 1 de cada 700.000 celdas será true.
- **Buscar páginas dada una palabra:** recorrer una fila: $3 \cdot 10^9$ elementos.
- **Buscar palabras en una página dada:** recorrer una columna: $2 \cdot 10^7$ elementos.

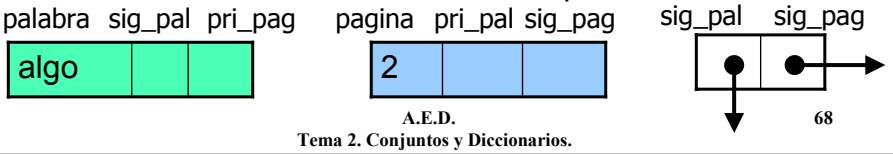
2.5.2. Listas múltiples.

- Ninguna estructura, por sí misma, proporciona un buen tiempo de ejecución con un uso de memoria razonable.
- Con listas, una operación es rápida y la otra muy ineficiente.
- **Solución:** combinar las dos estructuras de listas en una sola.
  - Listas de palabras en una página: sig_pal.
  - Lista de páginas en una palabra: sig_pag.
  - Las listas son circulares.

2.5.2. Listas múltiples.



- Celdas de la estructura de listas múltiples:



2.5.2. Listas múltiples.

- **Buscar páginas dada una palabra, pal**
  - Recorrer la lista horizontal empezando en **pal.pri_pag**.
  - Para cada elemento recorrer verticalmente hasta llegar (circularmente) a una página.
- **Buscar palabras en una página dada, pag**
  - Recorrer la lista vertical empezando en **pag.pri_pal**.
  - Para cada elemento recorrer horizontalmente hasta llegar (circularmente) a una palabra.

2.5.2. Listas múltiples.

Uso de memoria

- Sea k_1 = tamaño de 1 puntero = 8 bytes
- Cada celda ocupa: $2 \cdot k_1$ = 16 bytes
- En total hay $9 \cdot 10^{10}$ bytes.
- Memoria necesaria: $2 \cdot k_1 \cdot 9 \cdot 10^{10}$ bytes = 1.44 Terabytes = Lo mismo que con listas simples

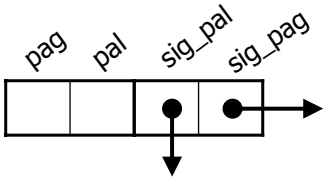
Eficiencia de las operaciones

- **Buscar páginas dada una palabra:** Tamaño lista horizontal (promedio) * Tamaño lista vertical (promedio) = 50*4.500 = 225.000 celdas recorridas.
- **Buscar palabras en una página dada:** Tamaño lista vertical (promedio) * Tamaño lista horizontal (promedio) = 4.500*50 = 225.000 celdas recorridas.

2.5.2. Listas múltiples.

Conclusiones

- Las listas simples por separado presentan problemas en una u otra operación.
- Usando listas múltiples conseguimos operaciones eficientes, con un uso de memoria razonable.
- Problema general: representación de matrices *escasas*.
- Añadiendo información redundante en las listas es posible mejorar la eficiencia, a costa de usar más memoria.



2.5.2. Listas múltiples.

Conclusión general

- Es algunas aplicaciones es posible, y adecuado, **combinar** varias estructuras de datos en una sola.
- Sobre unos mismos datos podemos tener diferentes estructuras de acceso: **estructuras de datos múltiples**.
- Normalmente, estas estructuras mejoran la eficiencia a costa de usar más memoria.