Programa de teoría

Parte I. Estructuras de Datos.

1. Abstracciones y especificaciones.
2. Conjuntos y diccionarios.
3. Representación de conjuntos mediante árboles.
4. Grafos.

Parte II. Algorítmica.

1. Análisis de algoritmos.
2. Divide y vencerás.
3. Algoritmos voraces.
4. Programación dinámica.
5. **Backtracking.**
6. Ramificación y poda.

PARTE II: ALGORÍTMICA

Tema 5. Backtracking.

5.1. Método general.
5.2. Análisis de tiempos de ejecución.
5.3. Ejemplos de aplicación.
  5.3.1. Problema de la mochila 0/1.
  5.3.2. Problema de la asignación.
  5.3.3. Resolución de juegos.

5.1. Método general.

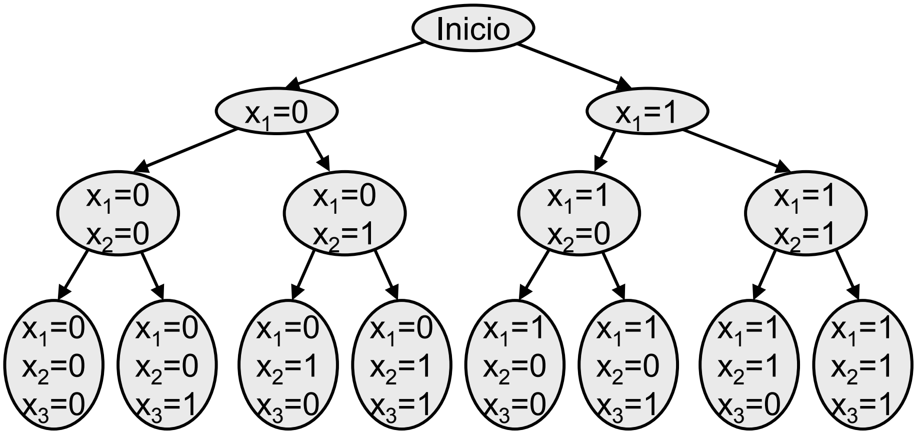
- El **backtracking** (o método de **retroceso** o **vuelta atrás**) es una técnica general de resolución de problemas, aplicable en problemas de **optimización**, **juegos** y otros tipos.
- El **backtracking** realiza una búsqueda exhaustiva y sistemática en el espacio de soluciones. Por ello, suele resultar muy ineficiente.
- Se puede entender como "opuesto" a avance rápido:
  - **Avance rápido:** añadir elementos a la solución y no deshacer ninguna decisión tomada.
  - **Backtracking:** añadir y quitar todos los elementos. Probar todas las combinaciones.

5.1. Método general.

- Una **solución** se puede expresar como una tupla: $(x_1, x_2, ..., x_n)$, satisfaciendo unas restricciones y tal vez optimizando cierta función objetivo.
- En cada momento, el algoritmo se encontrará en cierto nivel **k**, con una solución parcial $(x_1, ..., x_k)$.
  - Si se puede añadir un nuevo elemento a la solución $\mathbf{x_{k+1}}$, se genera y se avanza al nivel **k+1**.
  - Si no, se prueban otros valores para $\mathbf{x_k}$.
  - Si no existe ningún valor posible por probar, entonces se retrocede al nivel anterior **k-1**.
  - Se sigue hasta que la solución parcial sea una solución completa del problema, o hasta que no queden más posibilidades por probar.

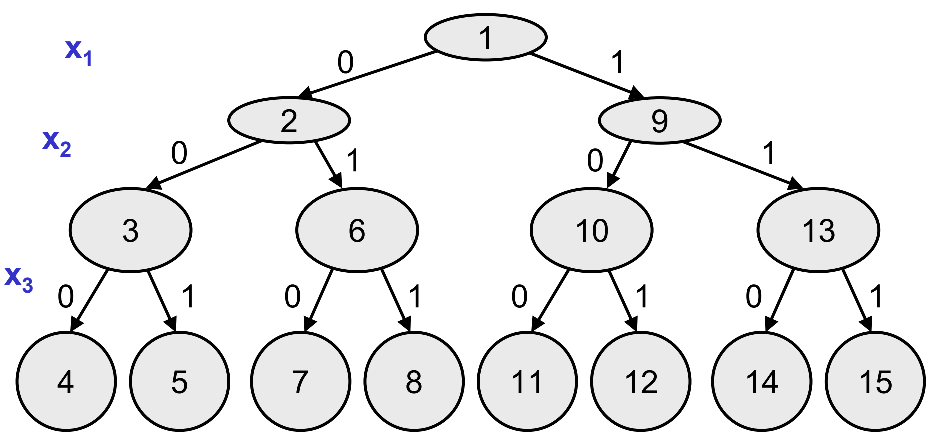
5.1. Método general.

- El resultado es equivalente a hacer un **recorrido en profundidad** en el árbol de soluciones.



5.1. Método general.

- Representación simplificada del árbol.



5.1. Método general.

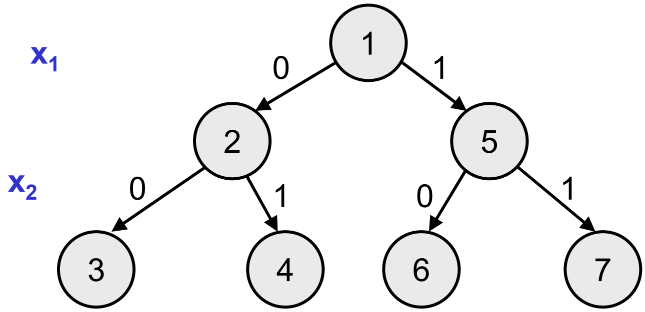
- **Árboles de backtracking:**
  - El árbol es simplemente una forma de representar la ejecución del algoritmo.
  - Es **implícito**, no almacenado (no necesariamente).
  - El recorrido es en **profundidad**, normalmente de izquierda a derecha.
  - La primera decisión para aplicar backtracking: ¿cómo es la forma del árbol?
  - **Preguntas relacionadas:** ¿Qué significa cada valor de la tupla solución (x_1, ..., x_n)? ¿Cómo es la representación de la solución al problema?

5.1. Método general.

- Tipos comunes de árboles de backtracking:
  - Árboles binarios.
  - Árboles n-arios.
  - Árboles permutacionales.
  - Árboles combinatorios.

5.1. Método general.

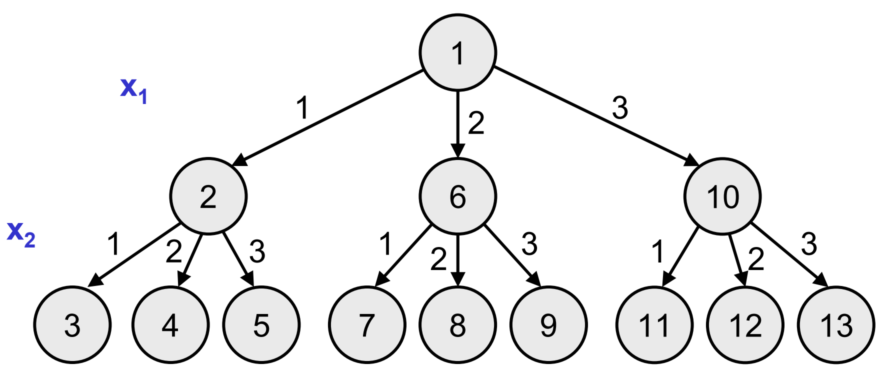
- **Árboles binarios: s=** $(x_1, x_2, ..., x_n)$, con $x_i \in \{0, 1\}$



- **Tipo de problemas:** elegir ciertos elementos de entre un conjunto, sin importar el orden de los elementos.
  - Problema de la mochila 0/1.
  - Encontrar un subconjunto de {12, 23, 1, 8, 33, 7, 22} que sume exactamente 50.

5.1. Método general.

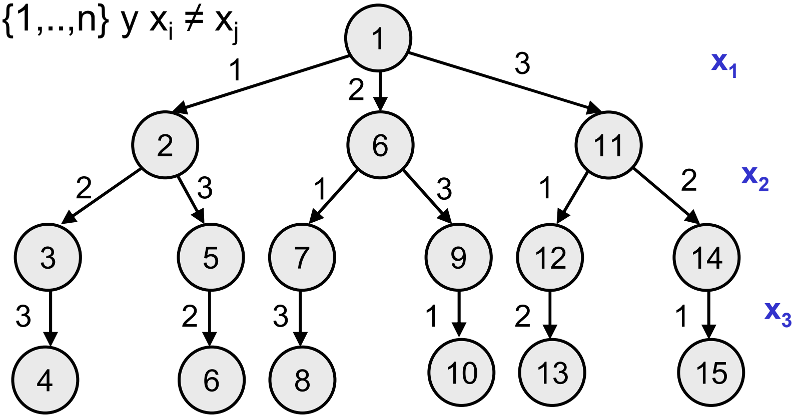
- **Árboles k-arios: s=** $(x_1, x_2, ..., x_n)$, con $x_i \in \{1,..,k\}$



- **Tipo de problemas:** varias opciones para cada x_i.
  - Problema del cambio de monedas.
  - Problema de las **n** reinas.

5.1. Método general.

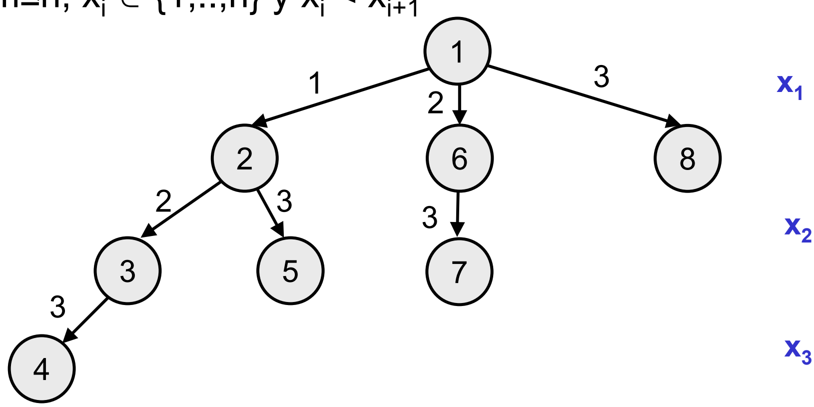
- **Árboles permutacionales: s=** $(x_1, x_2, ..., x_n)$, con $x_i \in \{1,..,n\}$ y $x_i \neq x_j$



- **Tipo de problemas:** los x_i no se pueden repetir.
  - Generar todas las permutaciones de (1, ..., n).
  - Asignar **n** trabajos a **n** personas, asignación uno-a-uno.

5.1. Método general.

- **Árboles combinatorios: s=** $(x_1, x_2, ..., x_m)$, con $m \leq n$, $x_i \in \{1,..,n\}$ y $x_i < x_{i+1}$



- **Tipo de problemas:** los mismos que con árb. binarios.
  - Binario: (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1) → Combinatorio: (2, 4, 7)

5.1. Método general.

Cuestiones a resolver antes de programar:

- ¿Qué tipo de árbol es adecuado para el problema?
  → ¿Cómo es la representación de la solución?
  → ¿Cómo es la tupla solución? ¿Qué indica cada $\mathbf{x_i}$ y qué valores puede tomar?
- ¿Cómo generar un recorrido según ese árbol?
  → Generar un nuevo nivel.
  → Generar los hermanos de un nivel.
  → Retroceder en el árbol.
- ¿Qué ramas se pueden descartar por no conducir a soluciones del problema?
  → Poda por restricciones del problema.
  → Poda según el criterio de la función objetivo.

5.1. Método general.

- **Esquema general (no recursivo)**. Problema de satisfacción de restricciones: buscamos cualquier solución que cumpla cierta propiedad, y se supone que existe alguna.

Backtracking (var s: TuplaSolución)

```
nivel:= 1
s:= s_INICIAL
fin:= false
repetir
    Generar (nivel, s)
    si Solución (nivel, s) entonces
        fin:= true
    sino si Criterio (nivel, s) entonces
        nivel:= nivel + 1
    sino mientras NOT MasHermanos (nivel, s) hacer
        Retroceder (nivel, s)
hasta fin
```

5.1. Método general.

- **Variables**:
  - **s**: Almacena la solución parcial hasta cierto punto.
  - $\mathbf{s}_{\mathbf{INICIAL}}$: Valor de inicialización.
  - **nivel**: Indica el nivel actual en el que se encuentra el algoritmo.
  - **fin**: Valdrá **true** cuando hayamos encontrado alguna solución.
- **Funciones**:
  - **Generar (nivel, s)**: Genera el siguiente hermano, o el primero, para el **nivel** actual.
  - **Solución (nivel, s)**: Comprueba si la tupla (s[1], ..., s[nivel]) es una solución válida para el problema.

5.1. Método general.

- **Funciones**:
  - **Criterio (nivel, s)**: Comprueba si a partir de (s[1], ..., s[nivel]) se puede alcanzar una solución válida. En otro caso se rechazarán todos los descendientes (**poda**).
  - **MasHermanos (nivel, s)**: Devuelve **true** si hay más hermanos del nodo actual que todavía no han sido generados.
  - **Retroceder (nivel, s)**: Retrocede un nivel en el árbol de soluciones. Disminuye en 1 el valor de **nivel**, y posiblemente tendrá que actualizar la solución actual, quitando los elementos retrocedidos.
- Además, suele ser común utilizar variables temporales con el valor actual (beneficio, peso, etc.) de la tupla solución.

5.1. Método general.

- **Ejemplo de problema:** Encontrar un subconjunto del conjunto T= {t_1, t_2, ..., t_n} que sume exactamente P.

- **Variables**:
  - Representación de la solución con un árbol binario.
  - **s**: array [1..n] de {-1, 0, 1}
    - s[i] = 0 → el número i-ésimo no se utiliza
    - s[i] = 1 → el número i-ésimo sí se utiliza
    - s[i] = -1 → valor de inicialización (número i-ésimo no estudiado)
  - $\mathbf{s_{INICIAL}}$: (-1, -1, ..., -1)
  - **fin**: Valdrá **true** cuando se haya encontrado solución.
  - **tact:** Suma acumulada hasta ahora (inicialmente 0).

5.1. Método general.

Funciones:

- **Generar (nivel, s)**
  s[nivel]:= s[nivel] + 1
  si s[nivel]==1 **entonces** tact:= tact + t_{nivel}
- **Solución (nivel, s)**
  devolver (nivel==n) Y (tact==P)
- **Criterio (nivel, s)**
  devolver (nivel<n) Y (tact≤P)
- **MasHermanos (nivel, s)**
  devolver s[nivel] < 1
- **Retroceder (nivel, s)**
  tact:= tact – t_{nivel}*s[nivel]
  s[nivel]:= -1
  nivel:= nivel – 1

5.1. Método general.

- **Algoritmo:** ¡el mismo que el esquema general!

```
Backtracking (var s: TuplaSolución)
    nivel:= 1
    s:= s_INICIAL
    fin:= false
    repetir
        Generar (nivel, s)
        si Solución (nivel, s) entonces
            fin:= true
        sino si Criterio (nivel, s) entonces
            nivel:= nivel + 1
        sino
            mientras NOT MasHermanos (nivel, s) hacer
                Retroceder (nivel, s)
        finsi
    hasta fin
```


5.1. Método general.

Variaciones del esquema general:

1) ¿Y si no es seguro que exista una solución?

2) ¿Y si queremos almacenar todas las soluciones (no sólo una)?

3) ¿Y si el problema es de optimización (maximizar o minimizar)?

5.1. Método general.

- **Caso 1)** Puede que no exista ninguna solución.

Backtracking (var s: TuplaSolución)

```
nivel:= 1
s:= s_INICIAL
fin:= false
repetir
    Generar (nivel, s)
    si Solución (nivel, s) entonces
        fin:= true
    sino si Criterio (nivel, s) entonces
        nivel:= nivel + 1
    sino
        mientras NOT MasHermanos (nivel, s) AND (nivel>0)
            hacer Retroceder (nivel, s)
    finsi
hasta fin OR (nivel==0)
```

Para poder generar todo el árbol de backtracking

5.1. Método general.

- **Caso 2)** Queremos almacenar todas las soluciones.

Backtracking (var s: TuplaSolución)

```
nivel:= 1
s:= s_INICIAL
fin:= false
repetir
    Generar (nivel, s)
    si Solución (nivel, s) entonces
        Almacenar (nivel, s)
    si Criterio (nivel, s) entonces
        nivel:= nivel + 1
    sino
        mientras NOT MasHermanos (nivel, s) AND (nivel>0)
            hacer Retroceder (nivel, s)
    finsi
hasta nivel==0
```

- En algunos problemas los nodos intermedios pueden ser soluciones
- O bien, retroceder después de encontrar una solución

5.1. Método general.

- **Caso 3)** Problema de optimización (maximización).

Backtracking (var s: TuplaSolución)

```
nivel:= 1
s:= s_INICIAL
voa:= -∞; soa:= Ø
repetir
    Generar (nivel, s)
    si Solución (nivel, s)  AND Valor(s) > voa entonces
        voa:= Valor(s); soa:= s
    si Criterio (nivel, s) entonces
        nivel:= nivel + 1
    sino
        mientras NOT MasHermanos (nivel, s) AND (nivel>0)
            hacer Retroceder (nivel, s)
    finsi
hasta  nivel==0
```

voa: valor óptimo actual
soa: solución óptima actual

5.1. Método general.

- **Ejemplo de problema:** Encontrar un subconjunto del conjunto T= {t_1, t_2, ..., t_n} que sume exactamente P, usando el menor número posible de elementos.

- **Funciones**:
  – **Valor(s)**
    devolver s[1] + s[2] + ... + s[n]
  – ¡Todo lo demás no cambia!

- **Otra posibilidad:** incluir una nueva variable:
  vact: entero. Número de elementos en la tupla actual.
  – **Inicialización** (añadir)**:** vact:= 0
  – **Generar** (añadir)**:** vact:= vact + s[nivel]
  – **Retroceder** (añadir)**:** vact:= vact – s[nivel]

5.2. Análisis de tiempos de ejecución.

- Normalmente, el tiempo de ejecución se puede obtener multiplicando dos factores:
  - Número de nodos del árbol.
  - Tiempo de ejecución de cada nodo.

...siempre que el tiempo en cada nodo sea del mismo orden.

- **Ejercicio:** ¿Cuántos nodos se generan en un árbol binario, k-ario, permutacional y combinatorio?
- Las podas eliminan nodos a estudiar, pero su efecto suele ser más impredecible.
- En general, los algoritmos de backtracking dan lugar a tiempos de órdenes factoriales o exponenciales → No usar si existen otras alternativas más rápidas.

5.3. Ejemplos de aplicación.

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- Como el problema de la mochila, pero los objetos no se pueden partir (se cogen enteros o nada).

- **Datos del problema:**
  - **n**: número de objetos disponibles.
  - **M**: capacidad de la mochila.
  - $\mathbf{p = (p_1, p_2, ..., p_n)}$ pesos de los objetos.
  - $\mathbf{b = (b_1, b_2, ..., b_n)}$ beneficios de los objetos.

- **Formulación matemática:**

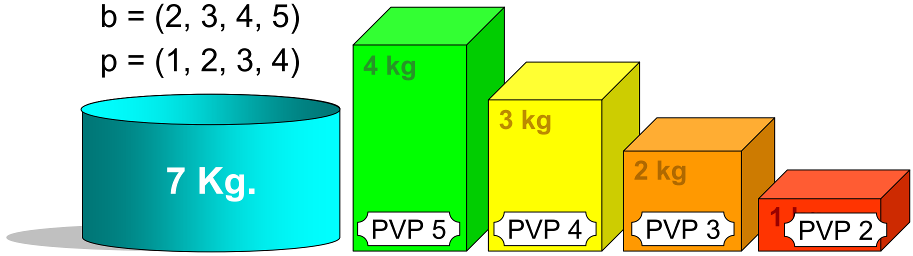
Maximizar $\sum_{i=1..n} x_i\, b_i$; sujeto a la restricción $\sum_{i=1..n} x_i\, p_i \leq M$, y $x_i \in \{0,1\}$

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Ejemplo:** n = 4; M = 7

  b = (2, 3, 4, 5)

  p = (1, 2, 3, 4)



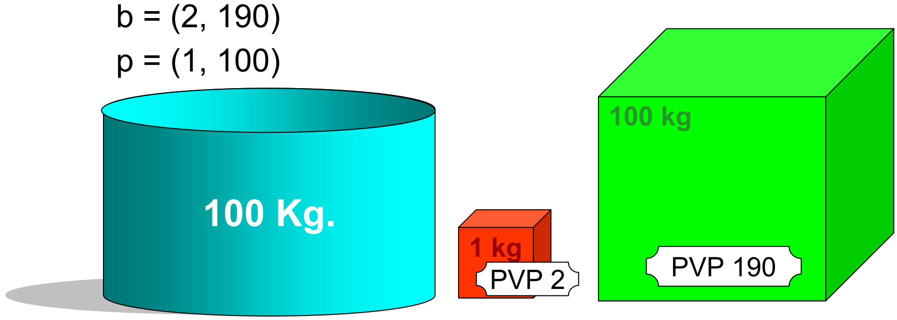
- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz para el problema de la mochila?
- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz adaptado al caso 0/1 (o se coge un objeto entero o no)?
- ¿Cuál es la solución óptima?
- **Ojo:** el problema es un NP-completo clásico.

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Ejemplo:** n = 2; M = 100

  b = (2, 190)

  p = (1, 100)



- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz para el problema de la mochila?
- ¿Qué solución devuelve el algoritmo voraz adaptado al caso 0/1 (o se coge un objeto entero o no)?
- ¿Cuál es la solución óptima?

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

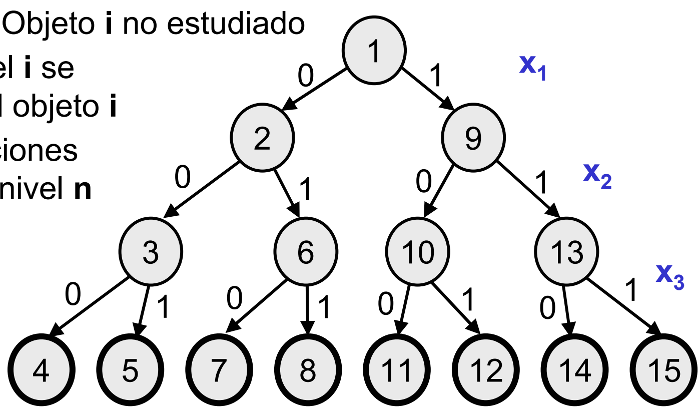
Aplicación de backtracking (proceso metódico):

1) Determinar cómo es la forma del árbol de backtracking ↔ cómo es la representación de la solución.
2) Elegir el esquema de algoritmo adecuado, adaptándolo en caso necesario.
3) Diseñar las funciones genéricas para la aplicación concreta: según la forma del árbol y las características del problema.
4) Posibles mejoras: usar variables locales con “valores acumulados”, hacer más podas del árbol, etc.

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

1) Representación de la solución.

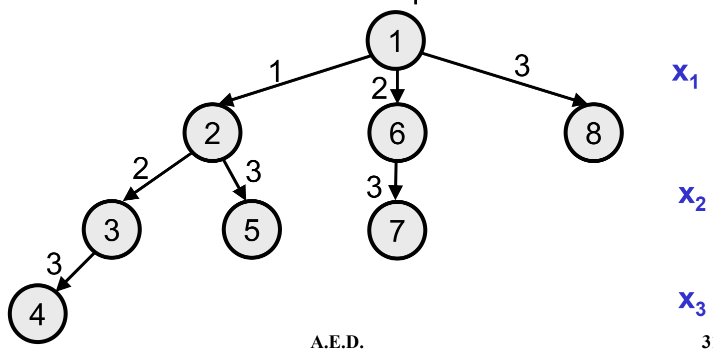
- Con un árbol binario: **s= (x_1, x_2, ..., x_n)**, con $x_i \in \{0,1\}$
  - $x_i = 0$ → No se coge el objeto **i**
  - $x_i = 1$ → Sí se coge el objeto **i**
  - $x_i = -1$ → Objeto **i** no estudiado
  - En el nivel **i** se estudia el objeto **i**
  - Las soluciones están en nivel **n**



5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

1) Representación de la solución.

- También es posible usar un árbol combinatorio:
  s= (x_1, x_2, ..., x_m), con $m \leq n$, $x_i \in \{1,..,n\}$ y $x_i < x_{i+1}$
  – x_i → Número de objeto escogido
  – m → Número total de objetos escogidos
  – Las soluciones están en cualquier nivel



5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

2) Elegir el esquema de algoritmo: caso optimización.

Consejo: No reinventar la rueda.

Backtracking (var s: array [1..n] de entero)

```
    nivel:= 1;  s:= s_INICIAL
    voa:= -∞; soa:= Ø
    pact:= 0; bact:= 0
    repetir
        Generar (nivel, s)
        si Solución (nivel, s) AND (bact > voa) entonces
            voa:= bact; soa:= s
        si Criterio (nivel, s) entonces
            nivel:= nivel + 1
        sino
            mientras NOT MasHermanos (nivel, s) AND (nivel>0)
                hacer Retroceder (nivel, s)
        finsi
    hasta nivel == 0
```

pact: Peso actual
bact: Beneficio actual

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

3) Funciones genéricas del esquema.

- **Generar (nivel, s)** → Probar primero 0 y luego 1

  s[nivel]:= s[nivel] + 1
  pact:= pact + p[nivel]*s[nivel]
  bact:= bact + b[nivel]*s[nivel]

  → **si** s[nivel]==1 **entonces**
  pact:= pact + p[nivel]
  bact:= bact + b[nivel]
  finsi

- **Solución (nivel, s)**

  devolver (nivel==n) AND (pact≤M)

- **Criterio (nivel, s)**

  devolver (nivel<n) AND (pact≤M)

- **MasHermanos (nivel, s)**

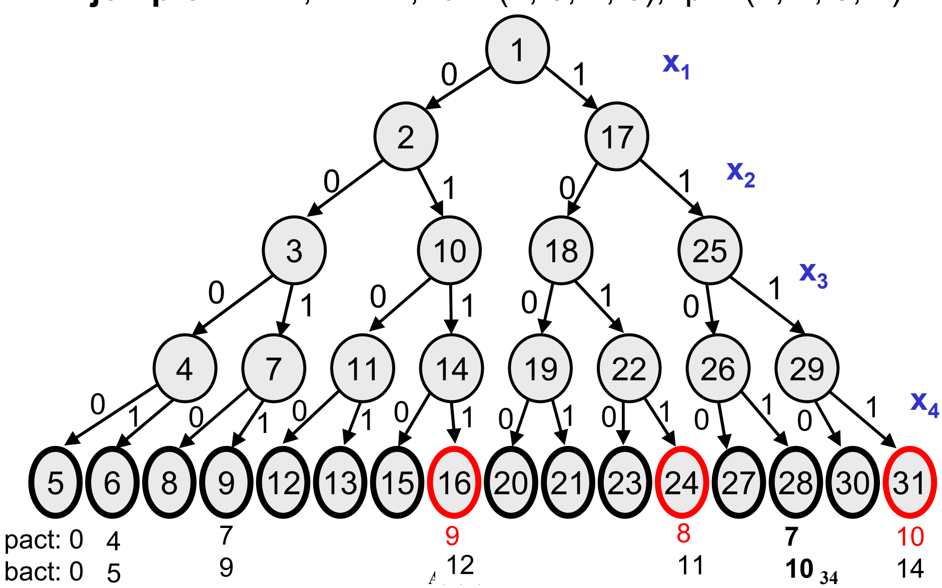
  devolver s[nivel] < 1

- **Retroceder (nivel, s)**

  pact:= pact – p[nivel]*s[nivel]
  bact:= bact – b[nivel]*s[nivel]
  s[nivel]:= -1
  nivel:= nivel – 1

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Ejemplo:** n = 4; M = 7; b = (2, 3, 4, 5); p = (1, 2, 3, 4)

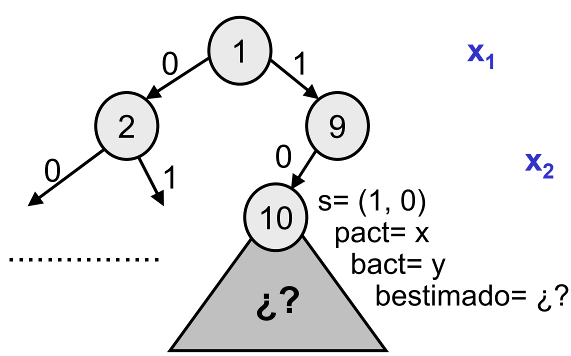


5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- El algoritmo resuelve el problema, encontrando la solución óptima pero...
- Es muy ineficiente. ¿Cuánto es el orden de complejidad?
- **Problema adicional:** en el ejemplo, se generan todos los nodos posibles, no hay ninguna poda. La función **Criterio** es siempre cierta (excepto para algunos nodos hoja).
- **Solución:** Mejorar la poda con una función **Criterio** más restrictiva.
- Incluir una poda según el criterio de optimización.
  - **Poda según el criterio de peso:** si el peso actual es mayor que M podar el nodo.
  - **Poda según el criterio de optimización:** si el beneficio actual no puede mejorar el **voa** podar el nodo.

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- ¿Cómo calcular una cota superior del beneficio que se puede obtener a partir del nodo actual, es decir $(x_1, ..., x_k)$?
- La estimación debe poder realizarse de forma rápida.

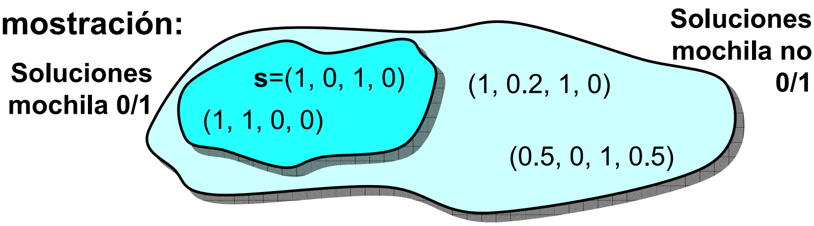


- La estimación del beneficio para el nivel y nodo actual será:

  bestimado:= bact + Estimacion (nivel+1, n, M - pact)

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Estimacion (k, n, Q)**: Estimar una cota superior para el problema de la mochila 0/1, usando los objetos **k..n**, con capacidad máxima **Q**.
- ¿Cómo?
- **Idea:** el resultado del problema de la mochila (no 0/1) es una cota superior válida para el problema de la mochila 0/1.
- **Demostración:**



- Sea **s** la solución óptima de la mochila 0/1. **s** es válida para la mochila no 0/1. Por lo tanto, la solución óptima de la mochila no 0/1 será **s** o mayor.

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Estimacion (k, n, Q)**: Aplicar el algoritmo voraz para el problema de la mochila, con los objetos **k..n**. Si los beneficios son enteros, nos podemos quedar con la parte entera por abajo del resultado anterior.
- ¿Qué otras partes se deben modificar?
- **Criterio (nivel, s)**

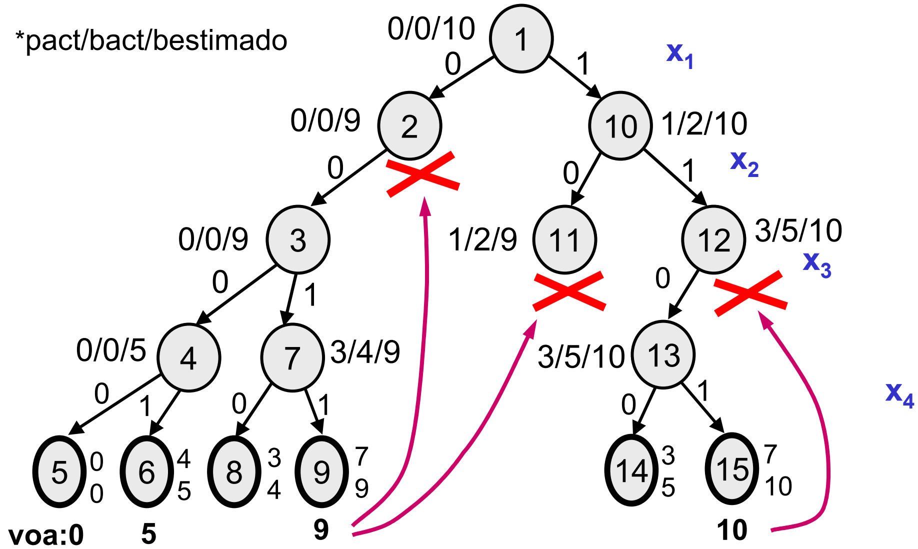
```
si (pact > M) OR (nivel == n) entonces devolver FALSO
sino
    bestimado:= bact + ⌊MochilaVoraz (nivel+1, n, M - pact)⌋
    devolver bestimado > voa
finsi
```

- En el algoritmo principal:

```
...
mientras (NOT MasHermanos (nivel, s) OR
        NOT Criterio (nivel, s)) AND (nivel > 0) hacer
    Retroceder (nivel, s)
...
```

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Ejemplo:** n = 4; M = 7; b = (2, 3, 4, 5); p = (1, 2, 3, 4)



5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- Se eliminan nodos pero... a costa de aumentar el tiempo de ejecución en cada nodo.
- ¿Cuál será el tiempo de ejecución total?
- Suponiendo los objetos ordenados por b_i/p_i...
- Tiempo de la función **Criterio** en el nivel **i** (en el peor caso) = 1 + Tiempo de la función **MochilaVoraz** = 1 + n - i
- **Idea intuitiva.** Tiempo en el peor caso (suponiendo todos los nodos): Número de nodos $O(2^n)$ * Tiempo de cada nodo (función criterio) O(n).
- ¿Tiempo: $O(n\cdot 2^n)$? NO

$$t(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot (n-i+1) = (n+1)\sum_{i=1}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = 2\cdot 2^{n+1} - 2n - 4$$

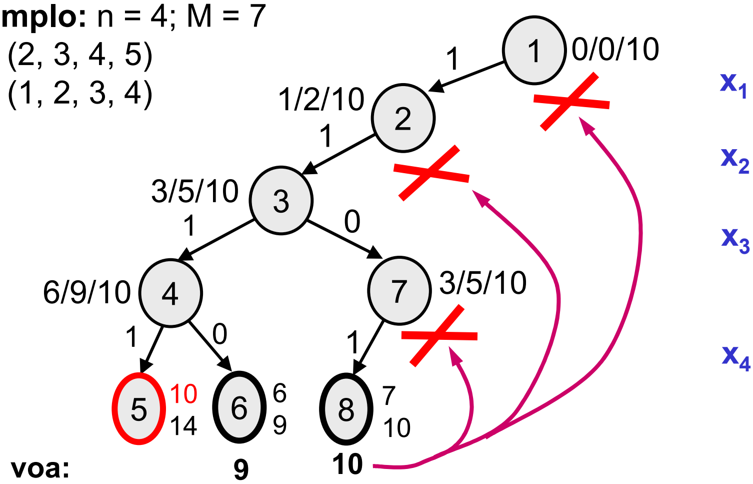
5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

Conclusiones:

- El cálculo intuitivo no es correcto.
- En el peor caso, el orden de complejidad sigue siendo un $O(2^n)$.
- En promedio se espera que la poda elimine muchos nodos, reduciendo el tiempo total.
- Pero el tiempo sigue siendo muy malo. ¿Cómo mejorarlo?
- Posibilidades:
  - Generar primero el 1 y luego el 0.
  - Usar un árbol combinatorio.
  - ...

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Modificación: Generar primero el 1 y luego el 0.**
- **Ejercicio:** Cambiar las funciones Generar y MasHermanos.
- **Ejemplo:** n = 4; M = 7
  b = (2, 3, 4, 5)
  p = (1, 2, 3, 4)

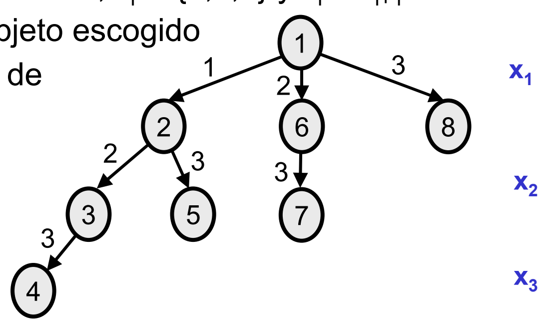


5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- En este caso es mejor la estrategia "primero el 1", pero ¿y en general?
- Si la solución óptima es de la forma s = (1, 1, 1, X, X, 0, 0, 0) entonces se alcanza antes la solución generando primero 1 (y luego 0).
- Si es de la forma s = (0, 0, 0, X, X, 1, 1, 1) será mejor empezar por 0.
- **Idea:** es de esperar que la solución de la mochila 0/1 sea "parecida" a la de la mochila no 0/1. Si ordenamos los objetos por b_i/p_i entonces tendremos una solución del primer tipo.

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

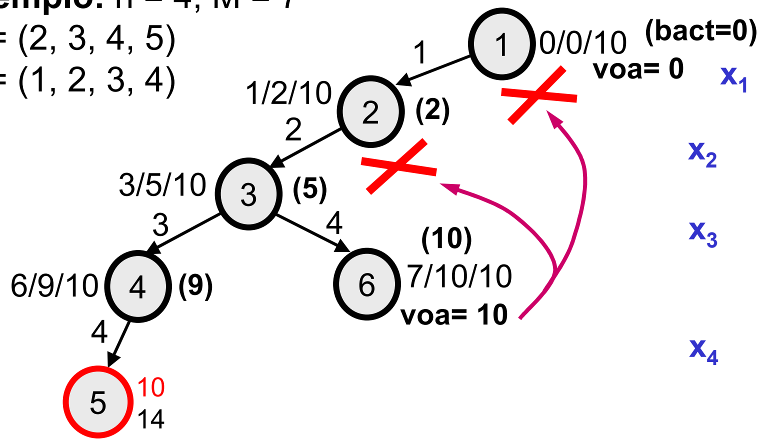
- **Modificación: Usar un árbol combinatorio.**
- **Representación de la solución:**
  s= (x_1, x_2, ..., x_m), con $m \leq n$, $x_i \in \{1,..,n\}$ y $x_i < x_{i+1}$
  - x_i → Número de objeto escogido
  - m → Número total de objetos escogidos
  - Las soluciones están en cualquier nivel



- **Ejercicio:** Cambiar la implementación para generar este árbol.
  - Esquema del algoritmo: nos vale el mismo.
  - Modificar las funciones Generar, Solución, Criterio y MasHermanos.

5.3.1. Problema de la mochila 0/1.

- **Ejemplo:** n = 4; M = 7
  b = (2, 3, 4, 5)
  p = (1, 2, 3, 4)



- **Resultado:** conseguimos reducir el número de nodos.
- ¿Mejorará el tiempo de ejecución y el orden de complejidad?

5.3.2. Problema de asignación.

- Existen **n** personas y **n** trabajos.
- Cada persona **i** puede realizar un trabajo **j** con más o menos rendimiento: **B[i, j]**.
- **Objetivo:** asignar una tarea a cada trabajador (asignación uno-a-uno), de manera que se maximice la suma de rendimientos.

Tareas

Personas

B	1	2	3
1	4	9	1
2	7	2	3
3	6	3	5

Ejemplo 1. (P1, T1), (P2, T3), (P3, T2)

B_{TOTAL}= 4+3+3= 10

Ejemplo 2. (P1, T2), (P2, T1), (P3, T3)

B_{TOTAL}= 9+7+5= 21

5.3.2. Problema de asignación.

- El problema de asignación es un problema **NP-completo** clásico.
- Otras variantes y enunciados:
  - Problema de los **matrimonios estables**.
  - Problemas con **distinto número** de tareas y personas. Ejemplo: problema de los árbitros.
  - Problemas de **asignación de recursos**: fuentes de oferta y de demanda. Cada fuente de oferta tiene una capacidad O[i] y cada fuente de demanda una D[j].
  - **Isomorfismo de grafos:** la matriz de pesos varía según la asignación realizada.

5.3.2. Problema de asignación.

Enunciado del problema de asignación

- **Datos del problema:**
  - **n:** número de personas y de tareas disponibles.
  - **B: array** [1..n, 1..n] **de** entero. Rendimiento o beneficio de cada asignación. **B[i, j]** = beneficio de asignar a la persona **i** la tarea **j**.
- **Resultado:**
  - Realizar **n** asignaciones $\{(p_1, t_1), (p_2, t_2), ..., (p_n, t_n)\}$.
- **Formulación matemática:**

Maximizar $\sum_{i=1..n} B[p_i, t_j]$, sujeto a la restricción $p_i \neq p_j$, $t_i \neq t_j$, $\forall$ $i \neq j$

5.3.2. Problema de asignación.

1) Representación de la solución

- Mediante **pares de asignaciones**: $s = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), ..., (p_n, t_n)\}$, con $p_i \neq p_j$, $t_i \neq t_j$, $\forall\ i \neq j$
  - La tarea t_i es asignada a la persona p_i.
  - Árbol muy ancho. Hay que garantizar muchas restricciones. Representación no muy buena.
- Mediante **matriz de asignaciones**: $s = ((a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}))$, con $a_{ij} \in \{0, 1\}$, y con $\sum_{i=1..n} a_{ij} = 1$, $\sum_{j=1..n} a_{ij} = 1$.
  - $a_{ij} = 1 \rightarrow$ la tarea **j** se asigna a la persona **i**
  - $a_{ij} = 0 \rightarrow$ la tarea **j** no se asigna a la persona **i**

Tareas

Personas	a	1	2	3
	1	0	1	0
	2	1	0	0
	3	0	0	1

5.3.2. Problema de asignación.

1) Representación de la solución

- Mediante **matriz de asignaciones**.
  - Árbol binario, pero muy profundo: n^2 niveles en el árbol.
  - También tiene muchas restricciones.
- Desde el punto de vista de las **personas:** $s = (t_1, t_2, ..., t_n)$, siendo $t_i \in \{1, ..., n\}$, con $t_i \neq t_j$, $\forall\ i \neq j$
  - $t_i \rightarrow$ número de tarea asignada a la persona **i**.
  - Da lugar a un árbol permutacional. ¿Cuánto es el número de nodos?
- Desde el punto de vista de las **tareas:** $s = (p_1, p_2, ..., p_n)$, siendo $p_i \in \{1, ..., n\}$, con $p_i \neq p_j$, $\forall\ i \neq j$
  - $p_i \rightarrow$ número de persona asignada a la tarea **i**.
  - Representación análoga (dual) a la anterior.

5.3.2. Problema de asignación.

2) Elegir el esquema de algoritmo: caso optimización.

Backtracking (var s: array [1..n] de entero)

nivel:= 1; s:= $s_{INICIAL}$
voa:= -∞; soa:= Ø
bact:= 0
repetir
    Generar (nivel, s)
    si Solución (nivel, s) AND (bact > voa) **entonces**
        voa:= bact; soa:= s
    si Criterio (nivel, s) **entonces**
        nivel:= nivel + 1
    sino
        mientras NOT MasHermanos (nivel, s) AND (nivel>0)
            hacer Retroceder (nivel, s)
    finsi
hasta nivel == 0

bact: Beneficio actual

5.3.2. Problema de asignación.

3) Funciones genéricas del esquema.

- **Variables:**
  - **s: array** [1..n] **de** entero: cada **s[i]** indica la tarea asignada a la persona **i**. Inicializada a 0.
  - **bact:** beneficio de la solución actual

- **Generar (nivel, s)** → Probar primero 1, luego 2, ..., n
    s[nivel]:= s[nivel] + 1
    si s[nivel]==1 **entonces** bact:= bact + B[nivel, s[nivel]]
    sino bact:= bact + B[nivel, s[nivel]] – B[nivel, s[nivel]-1]

- **Criterio (nivel, s)**
    para i:= 1, ..., nivel-1 **hacer**
        si s[nivel] == s[i] **entonces devolver** false
    finpara
    devolver true

5.3.2. Problema de asignación.

3) Funciones genéricas del esquema.

- **Solución (nivel, s)**

  devolver (nivel==n) AND Criterio (nivel, s)

- **MasHermanos (nivel, s)**

  devolver s[nivel] < n

- **Retroceder (nivel, s)**

  bact:= bact – B[nivel, s[nivel]]

  s[nivel]:= 0

  nivel:= nivel – 1

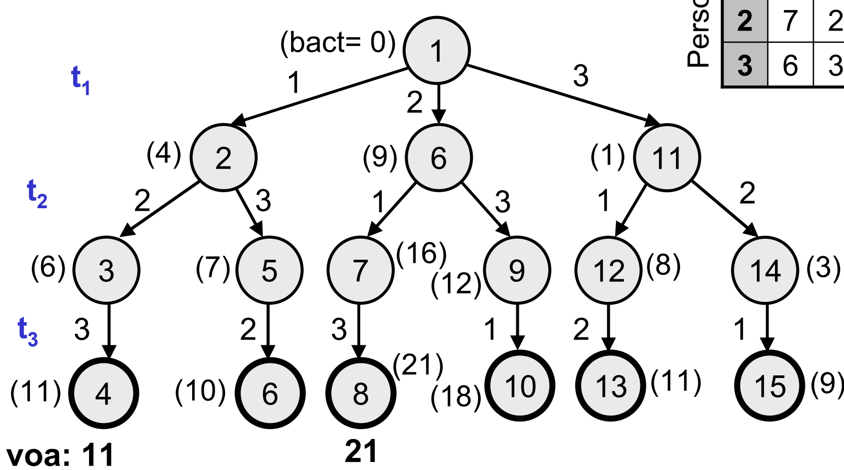
5.3.2. Problema de asignación.

- **Ejemplo de aplicación. n** = 3

Tareas

Personas

B	1	2	3
1	4	9	1
2	7	2	3
3	6	3	5



5.3.2. Problema de asignación.

- ¿Cuánto es el orden de complejidad del algoritmo?

- **Problema:** la función **Criterio** es muy lenta, repite muchas comprobaciones.
- **Solución:** usar un array que indique las tareas que están ya usadas en la asignación actual.
  - **usadas: array** [1..n] **de** booleano.
  - **usadas[i] = true**, si la tarea **i** es usada ya en la planificación actual.
  - **Inicialización: usadas[i] = false**, para todo **i**.
  - Modificar las funciones del esquema.

5.3.2. Problema de asignación.

3) Funciones genéricas del esquema.

- **Criterio (nivel, s)**

```
si usadas[s[nivel]] entonces
    devolver false
sino
    usadas[s[nivel]]:= true
    devolver true
finsi
```

O bien hacerlo antes de la instrucción:
nivel:= nivel + 1

- **Solución (nivel, s)**

    devolver (nivel==n) AND **NOT usadas[s[nivel]]**

- **Retroceder (nivel, s)**

```
bact:= bact – B[nivel, s[nivel]]
usadas[s[nivel]]:= false
s[nivel]:= 0
nivel:= nivel – 1
```

5.3.2. Problema de asignación.

3) Funciones genéricas del esquema.

- Las funciones **Generar** y **MasHermanos** no se modifican.

- ¿Cuál es ahora el orden de complejidad del algoritmo?

- **Conclusiones:**
  - El algoritmo sigue siendo muy ineficiente.
  - Aunque garantiza la solución óptima...
  - ¿Cómo mejorar el tiempo?
  - Aplicar una poda según el criterio de optimización...

5.3.3. Resolución de juegos.

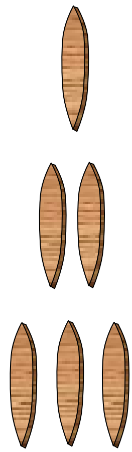
- La idea de backtracking (recorrido exhaustivo del árbol de un problema) se puede aplicar en **problemas de juegos**.
- **Objetivo final:** decidir el movimiento óptimo que debe realizar el jugador que empieza moviendo.

Características (juegos de inteligencia):

- En el juego participan dos jugadores, **A** y **B**, que mueven alternativamente (primero **A** y luego **B**).
- En cada movimiento un jugador puede elegir entre un número finito de posibilidades.
- El resultado del juego puede ser: gana **A**, gana **B** o hay empate. El objetivo de los dos jugadores es ganar.
- Supondremos juegos en los que no influye el azar.
- **Ejemplos.** Las tres en raya, las damas, el ajedrez, el NIM, el juego de los palillos, etc.

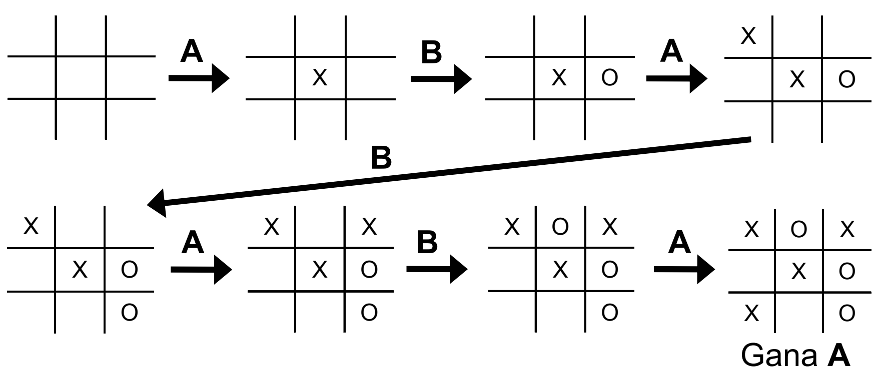
5.3.3. Resolución de juegos.

- **Ejemplo.** El juego de los palillos.
  - Tres filas de palillos (en general **n**).
  - Cada jugador debe quitar uno o varios palillos, pero siempre de la misma fila.
  - Pierde el que quite el último palillo.



5.3.3. Resolución de juegos.

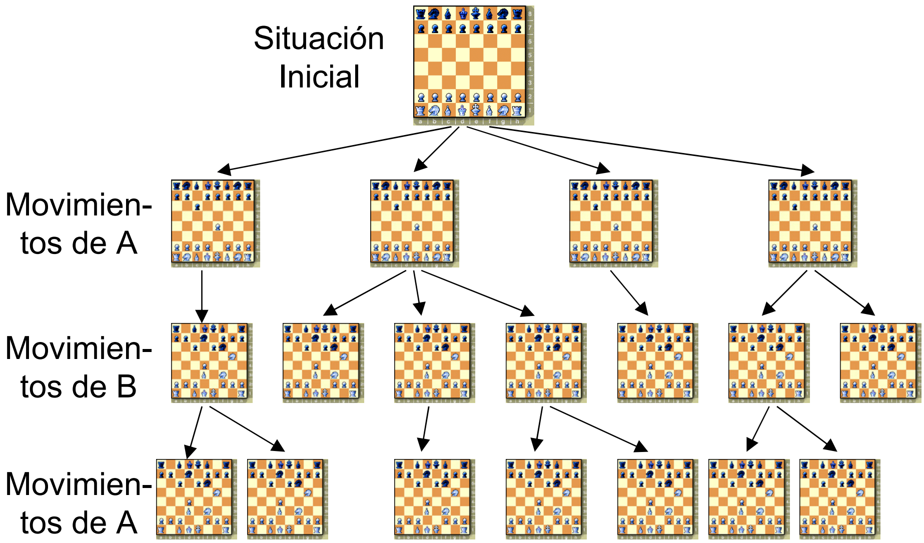
- **Ejemplo.** El juego de las tres en raya.



- Una partida es una **secuencia** de movimientos.
- Si representamos todas las partidas (todos los posibles movimientos) tenemos... **¡un árbol!**

5.3.3. Resolución de juegos.

- **Ejemplo.** Ajedrez.

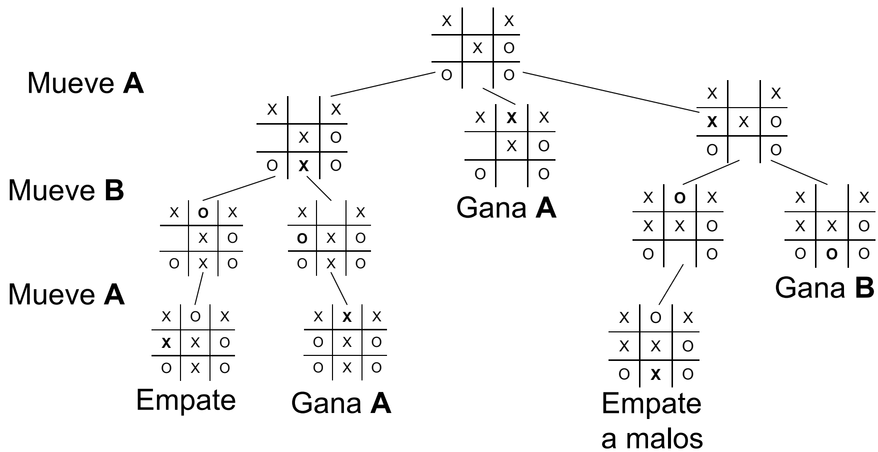


5.3.3. Resolución de juegos.

- **Árboles de juegos:**
  - Cada nodo del árbol representa un posible estado del juego.
  - La **raíz** representa el comienzo de una partida.
  - Los **descendientes** de un nodo dado son los movimientos posibles de cada jugador.
  - En el nivel 1 mueve el jugador **A**.
  - En el nivel 2 mueve el jugador **B**.
  - En el nivel 3 mueve el jugador **A**.
  - En el nivel 4 mueve el jugador **B**.
  - ...
  - Una hoja es una situación donde acaba el juego.

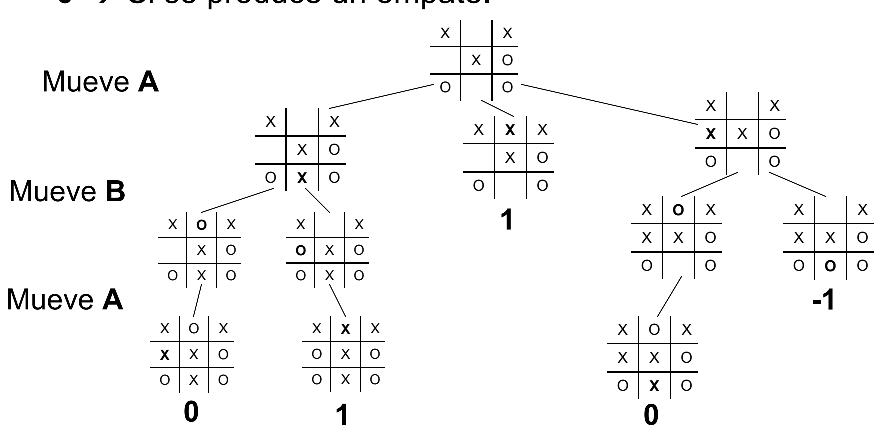
5.3.3. Resolución de juegos.

- **Ejemplo**. Parte del árbol de juego de las tres en raya.
  A → X **B → O**



5.3.3. Resolución de juegos.

- Etiquetamos cada hoja con un número, que valdrá:
  - **1** → Si el juego finaliza con victoria de **A**.
  - **-1** → Si acaba con victoria de **B**.
  - **0** → Si se produce un empate.



5.3.3. Resolución de juegos.

- El objetivo para **A**: encontrar un camino en el árbol que le lleve hasta una hoja con valor 1.

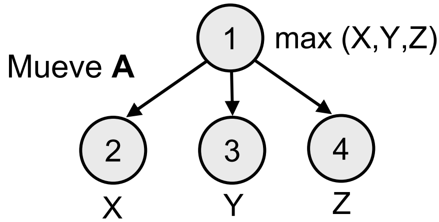
- Pero, ¿qué pasa si a partir de la situación inicial no se llega a un nodo hoja con valor 1?
  - En los movimientos de **B**, el jugador **B** intentará llegar a hojas con valor -1 (ó en caso de no existir, de valor 0).
  - En los movimientos de **A**, el jugador **A** intentará llegar a hojas con valor 1 (ó en caso de no existir, de valor 0).

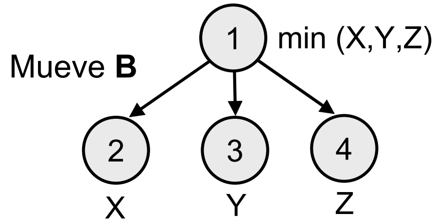
- De esta manera se define una forma de propagar el valor de los hijos hacia los padres: **estrategia minimax**.

5.3.3. Resolución de juegos.

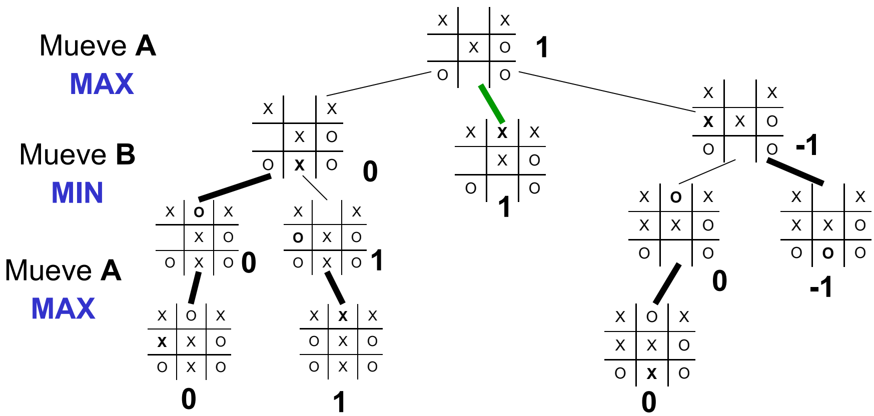
Estrategia minimax

- Los valores de las hojas se **propagan** a los padres de la siguiente forma:
  - En los movimientos de **A**, el valor del nodo padre será el máximo de los valores de los nodos hijos.
  - En los movimientos de **B**, el valor del nodo padre será el mínimo de los valores de los nodos hijos.
  - Se repite hasta llegar al nodo raíz (situación de partida).





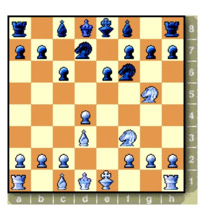
5.3.3. Resolución de juegos.



- **Movimiento óptimo:** aquel que conduzca al máximo.
- ... o si el primer nivel es un MIN, el que conduzca al mínimo.

5.3.3. Resolución de juegos.

- En general, tendremos una **función de utilidad**.
- **Función de utilidad:** para cada nodo hoja devuelve un valor numérico, indicando cómo de buena es esa situación para el jugador **A**.
- Si el árbol del juego es muy grande o infinito (por ejemplo, en el ajedrez) entonces la función de utilidad debe poder aplicarse sobre situaciones no terminales.
- En ese caso, la función de utilidad es una medida heurística: cómo es de prometedora la situación para **A**.



5.3.3. Resolución de juegos.

- **Proceso de resolución de juegos:**
  - Generar el árbol de juego hasta un nivel determinado. ¿Cuánto?
  - Aplicar la función de utilidad a los nodos hoja.
  - Propagar los valores de utilidad hasta la raíz, usando la **estrategia minimax**:
    - En los movimientos impares tomar el máximo de los hijos.
    - En los movimientos pares tomar el mínimo de los hijos.
  - **Solución final:** escoger el movimiento indicado por el hijo de la raíz con mayor valor.

- **Implementación:** usaremos un backtracking recursivo.
- Backtracking → el recorrido será en profundidad.

5.3.3. Resolución de juegos.

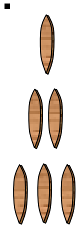
- **Implementación de la estrategia minimax.**

```
BuscaMinimax (B: TipoTablero; modo: (MAX, MIN)) : real
    si EsHoja(B) entonces
        devolver Utilidad (B)
    sino
        si modo == MAX entonces valoract:= -∞
        sino valoract:= ∞
        para cada hijo C del tablero B hacer
            si modo == MAX entonces
                valoract:= max (valoract, BuscaMinimax(C, MIN))
            sino
                valoract:= min (valoract, BuscaMinimax(C, MAX))
            finsi
        finpara
        devolver valoract
    finsi
```

5.3.3. Resolución de juegos.

- **Tipos de datos:**
  - **TipoTablero:** Representación del estado del juego en un momento dado.
- **Funciones genéricas:**
  - **EsHoja (B):** Indica si el nodo es una situación terminal, o si estamos en el nivel máximo.
  - **Utilidad (B, modo):** Devuelve el valor de la función de utilidad para el tablero **B** en el **modo** indicado.
  - **para cada hijo C del tablero B:** Iterador para generar todos los movimientos a partir de una situación de partida **B**.
- **Ojo:** Faltaría devolver también el movimiento óptimo.

5.3.3. Resolución de juegos.



- **Ejemplo.** El juego de los palillos.
- Representación del tablero:

  tipo TipoTablero = **array** [1..n] **de** entero
- **Funciones:**

  EsHoja (B)

      devolver NPal(B) ≤ 1

  Utilidad (B, modo)

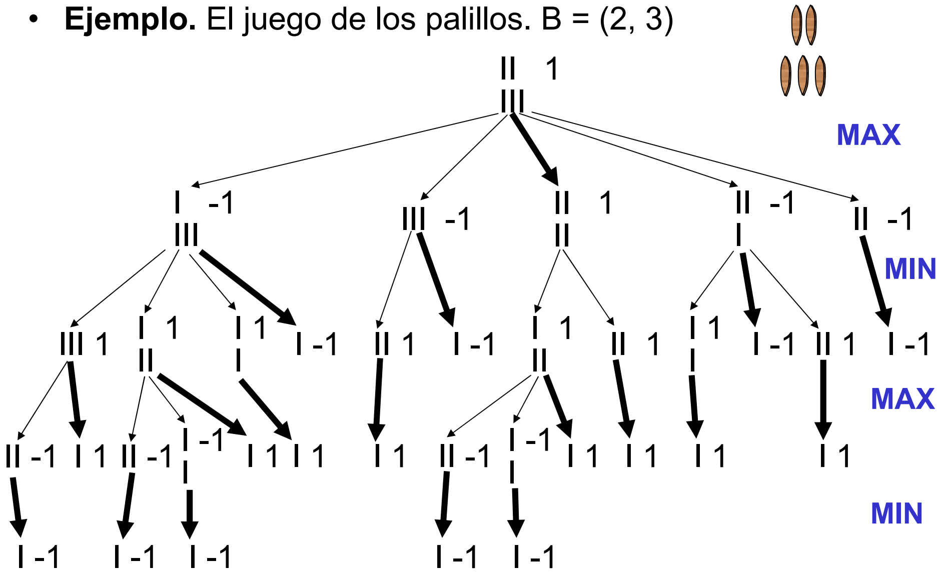
      si (NPal(B)==0 AND modo==MAX) OR
      (NPal(B)==1 AND modo==MIN) **entonces devolver** 1
    sino devolver -1

  para cada hijo C del tablero B

      para i:= 1, ..., n **hacer**
        para j:= 1, ..., B[i] **hacer**
            C:= B
            C[i]:= C[i] – j

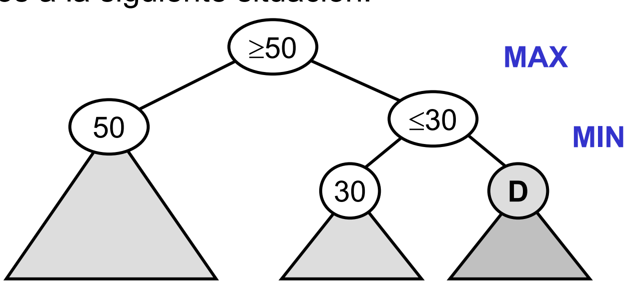
5.3.3. Resolución de juegos.

- **Ejemplo.** El juego de los palillos. B = (2, 3)



5.3.3. Resolución de juegos.

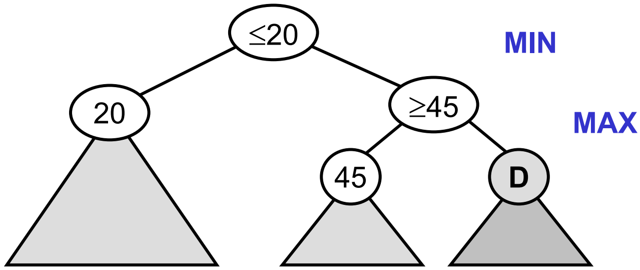
- Sobre los árboles de juegos se puede aplicar un tipo propio de poda, conocida como poda **alfa-beta**.
- **Poda Alfa:**
  Supongamos que en cierto momento de la evaluación llegamos a la siguiente situación.



- Haya lo que haya en **D**, nunca estará el movimiento óptimo.
- **Conclusión:** podar el nodo **D** y sus descendientes.

5.3.3. Resolución de juegos.

- **Poda Beta:**
  Supongamos que en cierto momento de la evaluación llegamos a la siguiente situación.



- Haya lo que haya en **D**, nunca estará el movimiento óptimo.
- **Conclusión:** podar el nodo **D** y sus descendientes.

5.3.3. Resolución de juegos.

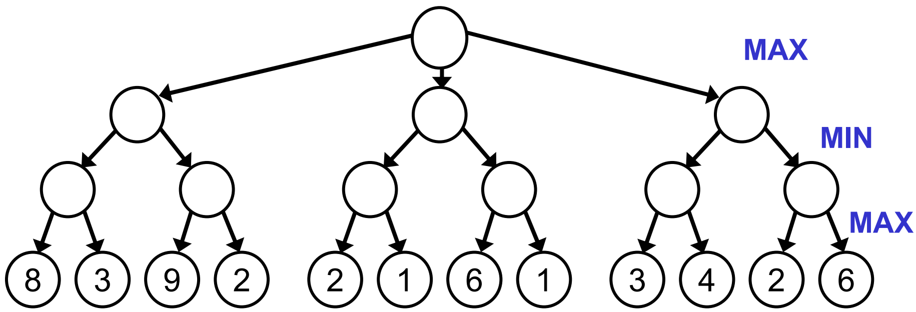
- **Implementación estrategia minimax, con poda alfa-beta.**

BuscaMinimax (B: TipoTablero; valorPadre: real; modo: (MAX, MIN)) : real

```
    si EsHoja(B) entonces
       devolver Utilidad (B)
    sino
       si modo == MAX entonces valoract:= -∞
       sino valoract:= ∞
       para cada hijo C del tablero B hacer
          si modo == MAX entonces
             valoract:= max (valoract, BuscaMinimax(C, valoract, MIN))
{ P. beta}   si valoract ≥ valorPadre entonces salir del para
          sino
             valoract:= min (valoract, BuscaMinimax(C, valoract, MAX))
{ P. alfa}   si valoract ≤ valorPadre entonces salir del para
          finsi
       finpara
       devolver valoract
    finsi
```

5.3.3. Resolución de juegos.

- ¿Cómo sería la llamada inicial al procedimiento **BuscaMinimax**?
- **Ejemplo.** Aplicar la estrategia minimax con poda alfa-beta al siguiente árbol de juego.



5. Conclusiones.

- **Backtracking:** Recorrido exhaustivo y sistemático en un árbol de soluciones.
- **Pasos para aplicarlo:**
  - Decidir la forma del árbol.
  - Establecer el esquema del algoritmo.
  - Diseñar las funciones genéricas del esquema.
- Relativamente fácil diseñar algoritmos que encuentren soluciones óptimas pero...
- Los algoritmos de backtracking son muy ineficientes.

- **Mejoras:** mejorar los mecanismos de poda, incluir otros tipos de recorridos (no solo en profundidad)
  → Técnica de **Ramificación y Poda.**