Programa de teoría

Parte I. Estructuras de Datos.

1. Abstracciones y especificaciones.
2. Conjuntos y diccionarios.
3. Representación de conjuntos mediante árboles.
4. Grafos.

Parte II. Algorítmica.

1. Análisis de algoritmos.
2. **Divide y vencerás.**
3. Algoritmos voraces.
4. Programación dinámica.
5. Backtracking.
6. Ramificación y poda.

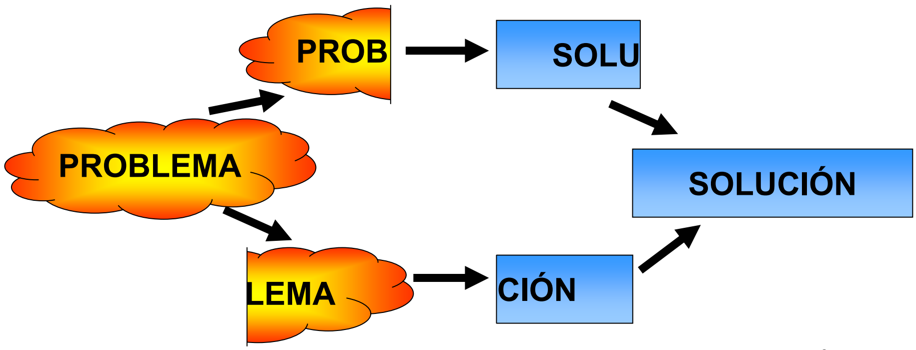
PARTE II: ALGORÍTMICA

Tema 2. Divide y vencerás.

2.1. Método general.
2.2. Análisis de tiempos de ejecución.
2.3. Ejemplos de aplicación.
  2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.
  2.3.2. Multiplicación rápida de matrices.
  2.3.3. Ordenación por mezcla y ordenación rápida.
  2.3.4. El problema de selección.

2.1. Método general.

- La técnica **divide y vencerás** consiste en:
  - Descomponer un problema en un conjunto de subproblemas más pequeños.
  - Se resuelven estos subproblemas.
  - Se combinan las soluciones para obtener la solución para el problema original.



2.1. Método general.

- **Esquema general:**

  DivideVencerás (p: problema)

  Dividir (p, p_1, p_2, ..., p_k)

  para i:= 1, 2, ..., k

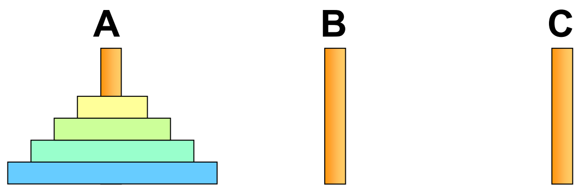
  s_i:= *Resolver* (p_i)

  solución:= *Combinar* (s_1, s_2, ..., s_k)

- Normalmente para resolver los subproblemas se utilizan llamadas recursivas al mismo algoritmo (aunque no necesariamente).

- **Ejemplo.** Problema de las Torres de Hanoi.

2.1. Método general.



- **Ejemplo.** Problema de las torres de Hanoi. Mover **n** discos del poste A al C:
  – Mover **n-1** discos de A a B
  – Mover 1 disco de A a C
  – Mover **n-1** discos de B a C

2.1. Método general.

Hanoi (n, A, B, C: entero)
  si n==1 **entonces**
    mover (A, C)
  sino
    Hanoi (n-1, A, C, B)
    mover (A, C)
    Hanoi (n-1, B, A, C)
  finsi

- Si el problema es “pequeño”, entonces se puede resolver de forma directa.
- **Otro ejemplo.** Cálculo de los números de Fibonacci: F(n) = F(n-1) + F(n-2)
- F(0) = F(1) = 1

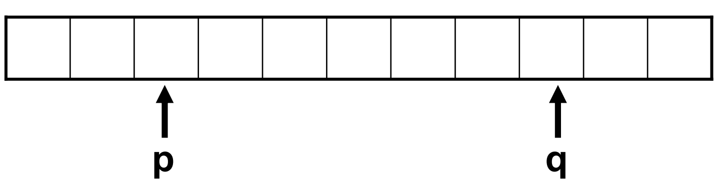
2.1. Método general.

- **Ejemplo.** Cálculo de los números de Fibonacci.
  - El cálculo del n-ésimo número de Fibonacci se descompone en calcular los números de Fibonacci n-1 y n-2.
  - *Combinar*: sumar los resultados de los subproblemas.
- La idea de la técnica divide y vencerás es aplicada en muchos campos:
  - Estrategias militares.
  - Demostraciones lógicas y matemáticas.
  - Diseño modular de programas.
  - Diseño de circuitos.
  - Etc.

2.1. Método general.

- **Esquema recursivo.** Con división en 2 subproblemas y datos almacenados en una tabla entre las posiciones p y q:

DivideVencerás (p, q: indice)
var m: indice
    si *Pequeño* (p, q) **entonces**
        solucion:= *SoluciónDirecta* (p, q)
    sino
        m:= *Dividir* (p, q)
        solucion:= *Combinar* (DivideVencerás (p, m),
                        DivideVencerás (m+1, q))
    finsi



2.1. Método general.

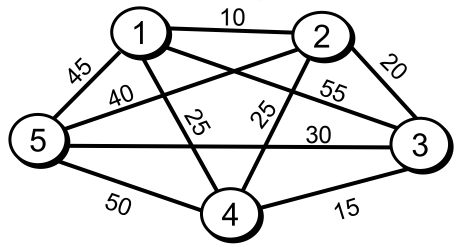
- Aplicación de divide y vencerás: encontrar la forma de definir las **funciones genéricas**:
  - *Pequeño*: Determina cuándo el problema es pequeño para aplicar la resolución directa.
  - *SoluciónDirecta*: Método alternativo de resolución para tamaños pequeños.
  - *Dividir*: Función para descomponer un problema grande en subproblemas.
  - *Combinar*: Método para obtener la solución al problema original, a partir de las soluciones de los subproblemas.
- Para que pueda aplicarse la técnica divide y vencerás debe existir una forma de definirlas → Aplicar un razonamiento inductivo...

2.1. Método general.

- Requisitos para aplicar divide y vencerás:
  - Necesitamos un **método** (más o menos **directo**) de resolver los problemas de tamaño pequeño.
  - El problema original debe poder dividirse fácilmente en un conjunto de subproblemas, del **mismo tipo** que el problema original pero con una resolución **más sencilla** (menos costosa).
  - Los subproblemas deben ser **disjuntos**: la solución de un subproblema debe obtenerse independientemente de los otros.
  - Es necesario tener un método de **combinar** los resultados de los subproblemas.

2.1. Método general.

- **Ejemplo.** Problema del viajante.



- Método directo de resolver el problema: Trivial con 3 nodos.
- Descomponer el problema en subproblemas más pequeños: ¿Por dónde?
- Los subproblemas deben ser disjuntos: ...parece que no
- Combinar los resultados de los subproblemas: ¡¡Imposible aplicar divide y vencerás!!

2.1. Método general.

- Normalmente los subproblemas deben ser de tamaños parecidos.
- Como mínimo necesitamos que hayan dos subproblemas.
- Si sólo tenemos un subproblema entonces hablamos de técnicas de **reducción** (o **simplificación**).

- **Ejemplo sencillo:** Cálculo del factorial. Fact(n):= n*Fact(n-1)

2.2. Análisis de tiempos de ejecución.

- Para el esquema recursivo, con división en dos subproblemas con la mitad de tamaño:

$$t(n) = \begin{cases} g(n) & \text{Si } n \leq n_0 \text{ (caso base)} \\ 2^*t(n/2) + f(n) & \text{En otro caso} \end{cases}$$

- **t(n)**: tiempo de ejecución del algoritmo DV.
- **g(n)**: tiempo de calcular la solución para el caso base, algoritmo directo.
- **f(n)**: tiempo de dividir el problema y combinar los resultados.

2.2. Análisis de tiempos de ejecución.

- Resolver suponiendo que **n** es potencia de 2
  $\mathbf{n} = 2^{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{n_0} = \mathbf{n}/2^{\mathbf{m}}$

- Aplicando expansión de recurrencias:

$$t(n) = 2^m g(n/2^m) + \sum_{i=0}^{m-1} (2^i f(n/2^i))$$

- Si $\mathbf{n_0}$=1, entonces **m=k**, y tenemos:

$$t(n) = 2^k g(n/2^k) + \sum_{i=0}^{k-1} (2^i f(n/2^i)) = n \cdot g(1) + \sum_{i=0}^{k-1} (2^i f(2^{k-i}))$$

2.2. Análisis de tiempos de ejecución.

- **Ejemplo 1.** La resolución directa se puede hacer en un tiempo constante y la división y combinación de resultados también.

  $g(n) = c; \quad f(n) = d$

  $\Rightarrow t(n) \in \Theta(n)$

- **Ejemplo 2.** La solución directa se calcula en $O(n^2)$ y la combinación en $O(n)$.

  $g(n) = c\cdot n^2; \quad f(n) = d\cdot n$

  $\Rightarrow t(n) \in \Theta(n \log n)$

2.2. Análisis de tiempos de ejecución.

- En general, si el realiza **a** llamadas recursivas de tamaño **n/b**, y la combinación requiere $f(n) = d\cdot n^p \in O(n^p)$, entonces:

  $t(n) = a\cdot t(n/b) + d\cdot n^p$

  Suponiendo $n = b^k \Rightarrow k = \log_b n$

  $t(b^k) = a\cdot t(b^{k-1}) + d\cdot b^{pk}$

  Podemos deducir que:

$$t(n) \in \left\{ \begin{array}{ll} O(n^{\log_b a}) & \text{Si } a > b^p \\ O(n^p\cdot \log n) & \text{Si } a = b^p \\ O(n^p) & \text{Si } a < b^p \end{array} \right\} \quad \text{Fórmula maestra}$$

2.2. Análisis de tiempos de ejecución.

- **Ejemplo 3.** Dividimos en 2 trozos de tamaño n/2, con $f(n) \in O(n)$:
  $a = b = 2$
  $t(n) \in O(n\cdot\log n)$

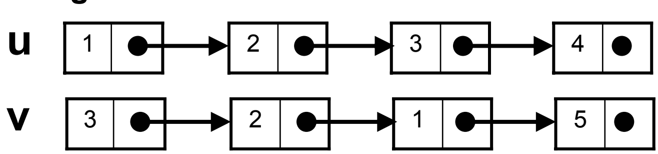
- **Ejemplo 4.** Realizamos 4 llamadas recursivas con trozos de tamaño n/2, con $f(n) \in O(n)$:
  $a = 4$; $b = 2$
  $t(n) \in O(n^{\log_2 4}) = O(n^2)$

2.3. Ejemplos de aplicación.

2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.

- Queremos representar enteros de tamaño arbitrariamente grande: mediante listas de cifras.

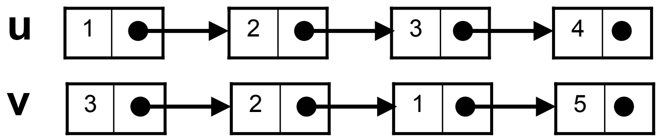
tipo EnteroLargo = Puntero[Nodo]
nodo = **registro**
valor : 0..9
sig : EnteroLargo
finregistro



- Implementar operaciones de suma, resta, **multiplicación**, etc.

2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.

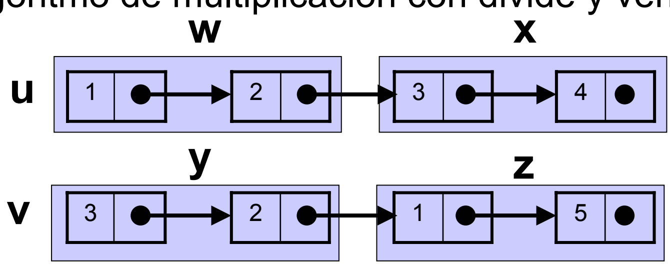
- Algoritmo clásico de multiplicación:
  - Inicialmente **r**= 0
  - Para cada cifra de **v** hacer
    - Multiplicar todas las cifras de **u** por **v**
    - Sumar a **r** con el desplazamiento correspondiente



- Suponiendo que **u** es de tamaño **n**, y **v** de tamaño **m**, ¿cuánto es el tiempo de ejecución?
- ¿Y si los dos son de tamaño **n**?

2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.

- Algoritmo de multiplicación con divide y vencerás:



  - *SoluciónDirecta*: si el tamaño es 1, usar la multiplicación escalar
  - *Dividir*: decomponer los enteros de tamaño **n** en dos trozos de tamaño **n**/2
  - Resolver los subproblemas correspondientes
  - *Combinar*: sumar los resultados de los subproblemas con los desplazamientos correspondientes

2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.

u	w	x
v	y	z
	$\lceil n/2 \rceil$	$\lfloor n/2 \rfloor = S$

$u = w \cdot 10^S + x$

$v = y \cdot 10^S + z$

- Cálculo de la multiplicación con **divide y vencerás**:

  $r = u \cdot v = 10^{2S} \cdot w \cdot y + 10^S \cdot (w \cdot z + x \cdot y) + x \cdot z$

- El problema de tamaño **n** es descompuesto en 4 problemas de tamaño **n**/2.
- La suma se puede realizar en un tiempo lineal O(**n**).
- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución?
- $t(n) = 4 \cdot t(n/2) + d \cdot n \in O(n^2)$ → No mejora el método clásico.

2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.

u	w	x
v	y	z
	$\lceil n/2 \rceil$	$\lfloor n/2 \rfloor = S$

$u = w \cdot 10^S + x$

$v = y \cdot 10^S + z$

- ¿Y si en vez de 4 tuviéramos 3 subproblemas...?
- **Multiplicación rápida de enteros largos (Karatsuba y Ofman):**

  $r = u \cdot v = 10^{2S} \cdot w \cdot y + 10^S \cdot [(w-x) \cdot (z-y) + w \cdot y + x \cdot z] + x \cdot z$

- Subproblemas:
  - $m1 = w \cdot y$
  - $m2 = (w-x) \cdot (z-y)$
  - $m3 = x \cdot z$

2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.

```
operación Mult(u, v: EnteroLargo; n, base: entero) : EnteroLargo
   si n == base entonces
         devolver MultBasica(u,v)
   sino
         asignar(w, primeros(n/2, u))
         asignar(x, ultimos(n/2, u))
         asignar(y, primeros(n/2, v))
         asignar(z, ultimos(n/2, v))
         asignar(m1, Mult(w, y, n/2, base))
         asignar(m2, Mult(x, z,n/2, base))
         asignar(m3, Mult(restar(w,x), restar(z,y), n/2, base))
         devolver sumar(sumar(Mult10(m1,n),
                        Mult10(sumar(sumar(m1,m2),m3),n/2)),m2)
   finsi
```

- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución?

2.3.1. Multiplicación rápida de enteros largos.

- En este caso se requieren 3 multiplicaciones de tamaño **n**/2:
  $t(n) = 3 \cdot t(n/2) + d' \cdot n \in O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.59})$
- El método es asintóticamente mejor que el método clásico.
- Sin embargo, las constantes y los términos de menor orden son mucho mayores (la combinación es muy costosa).
- En la práctica se obtiene beneficio con números de más de 500 bits...
- **Conclusión:**
  – Para tamaños pequeños usar el método directo.
  – Para tamaños grandes usar el método de Karatsuba y Ofman.
- El caso base no necesariamente debe ser **n** = 1...
- ¿Cuál es el tamaño óptimo del caso base?

2.3.2. Multiplicación rápida de matrices.

- Supongamos el problema de multiplicar dos matrices cuadradas A, B de tamaños **n**x**n**. C = AxB

  $C(i, j) = \sum_{k=1..n} A(i, k)\cdot B(k, j)$; Para todo i, j= 1..n
- Método clásico de multiplicación:

```
for i:= 1 to N do
  for j:= 1 to N do
    suma:= 0
    for k:= 1 to N do
      suma:= suma + a[i,k]*b[k,j]
    end
    c[i, j]:= suma
  end
end
```

- El método clásico de multiplicación requiere $\Theta(n^3)$.

2.3.2. Multiplicación rápida de matrices.

- Aplicamos **divide y vencerás**:
  Cada matriz de **n**x**n** es dividida en cuatro submatrices de tamaño (**n**/2)x(**n**/2): A_{ij}, B_{ij} y C_{ij}.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$
$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$
$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$
$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$

- Es necesario resolver 8 problemas de tamaño **n**/2.
- La combinación de los resultados requiere un $O(\mathbf{n}^2)$.

  $t(n) = 8\cdot t(n/2) + a\cdot n^2$
- Resolviéndolo obtenemos que t(n) es $O(n^3)$.
- Podríamos obtener una mejora si hiciéramos 7 multiplicaciones (o menos)...

2.3.2. Multiplicación rápida de matrices.

- **Multiplicación rápida de matrices (Strassen):**

$$\left.\begin{array}{l} P = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22}) \\ Q = (A_{12}+A_{22})\ B_{11} \\ R = A_{11}\ (B_{12}-B_{22}) \\ S = A_{22}(B_{21}-B_{11}) \\ T = (A_{11}+A_{12})B_{22} \\ U = (A_{21}-A_{11})(B_{11}+B_{12}) \\ V = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22}) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C_{11} = P + S - T + U \\ C_{12} = R + T \\ C_{21} = Q + S \\ C_{22} = P + R - Q + U \end{array}$$

- Tenemos 7 subproblemas de la mitad de tamaño.
- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución?

2.3.2. Multiplicación rápida de matrices.

- El tiempo de ejecución será:

  $t(n) = 7 \cdot t(n/2) + a \cdot n^2$

- Resolviéndolo, tenemos que:
  $t(n) \in O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.807})$.
- Las constantes que multiplican al polinomio son mucho mayores (tenemos muchas sumas y restas), por lo que sólo es mejor cuando la entrada es muy grande (empíricamente, para valores en torno a **n**>120).
- ¿Cuál es el tamaño óptimo del caso base?

2.3.2. Multiplicación rápida de matrices.

- Aunque el algoritmo es más complejo e inadecuado para tamaños pequeños, se demuestra que la **cota de complejidad del problema** es menor que $O(n^3)$.

- **Cota de complejidad de un problema:** tiempo del algoritmo más rápido posible que resuelve el problema.

- Algoritmo clásico → $O(n^3)$
- V. Strassen (1969) → $O(n^{2.807})$
- V. Pan (1984) → $O(n^{2.795})$
- D. Coppersmith y S. Winograd (1990) → $O(n^{2.376})$
- ...

2.3.3. Ordenación por mezcla y ordenación rápida.

- La **ordenación por mezcla (mergesort)** es un buen ejemplo de divide y vencerás.

- Para ordenar los elementos de un array de tamaño **n**:
  - *Dividir*: el array original es dividido en dos trozos de tamaño igual (o lo más parecidos posible), es decir $\lceil \mathbf{n}/2 \rceil$ y $\lfloor \mathbf{n}/2 \rfloor$.
  - Resolver recursivamente los subproblemas de ordenar los dos trozos.
  - *Pequeño*: si tenemos un solo elemento, ya está ordenado.
  - *Combinar*: combinar dos secuencias ordenadas. Se puede conseguir en O(**n**).

A

1	2	3	4	5	6	7	8
5	2	7	9	3	2	1	6

2.3.3. Ordenación por mezcla y ordenación rápida.

operación MergeSort (i, j: entero)
    si *Pequeño* (i, j) **entonces**
        OrdenaciónDirecta (i, j)
    sino
        s:= (i + j) div 2
        MergeSort (i, s)
        MergeSort (s+1, j)
        Combinar (i, s, j)
    finsi

- ¿Cómo es la operación *Combinar*?
- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución?
- **Ojo:** para tamaños pequeños es mejor un método de ordenación directa → Usar un caso base mayor que 1...

2.3.3. Ordenación por mezcla y ordenación rápida.

- La **ordenación rápida (quicksort)** utiliza también se basa en la técnica divide y vencerás.
  - *Dividir*: el array (i..j) es dividido usando un procedimiento ***Pivote***, que devuelve un entero l entre (i, j), tal que:
    $A[i_a] \leq A[l] \leq A[j_a]$, para i_a = i..l-1; j_a=l+1..j.
  - Ordenar recursivamente los trozos (i..l-1) y (l+1..j).
  - *Pequeño*: si tenemos un solo elemento, entonces ya está ordenado.
  - *Combinar*: no es necesario realizar ninguna operación.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	x	x	x ≤	Z	≤ y	y	y	y	y	y

i l j

2.3.3. Ordenación por mezcla y ordenación rápida.

```
operación QuickSort (i, j: entero)
    si i ≥ j entonces
        { Ya está ordenado, no hacer nada }
    sino
        Pivote (i, j, l)
        QuickSort (i, l-1)
        QuickSort (l+1, j)
    finsi
```

- Aunque no hay coste de combinar los resultados, la llamada a *Pivote* tiene un coste O(**n**).
- Las particiones no tienen por qué ser de tamaño **n**/2...

2.3.3. Ordenación por mezcla y ordenación rápida.

```
operación Pivote (i, j: entero; var l: entero)
   var p: tipo     { p es el pivote, del tipo del array }
       k: entero

        p:= A[i]   { se toma como pivote el primer elemento }
        k:= i
        l:= j+1
        repetir k:= k+1 hasta (A[k] > p) or (k ≥ j)
        repetir l:= l-1    hasta (A[l] ≤ p)
        mientras k < l hacer
            intercambiar (k, l)
            repetir k:= k+1  hasta (A[k] > p)
            repetir l:= l-1     hasta (A[l] ≤ p)
        finmientras
        intercambiar (i, l)
```

2.3.3. Ordenación por mezcla y ordenación rápida.

Tiempo de ejecución de la ordenación rápida:

- **Mejor caso.**

  Todas las particiones son de tamaño similar, **n**/2.

  $t(n) = 2 \cdot t(n/2) + b \cdot n + c \in \Omega(n \cdot \log n)$

- **Peor caso.**

  Se da cuando la matriz está ya ordenada. En ese caso una partición tiene tamaño 0 y la otra n-1.

  $t(n) = t(n-1) + b \cdot n + c \in O(n^2)$

- **Caso promedio.**

  Se puede comprobar que $t(n) \in O(n \cdot \log n)$

2.3.4. El problema de selección.

- Sea **T**[1..n] un array (no ordenado) de enteros, y sea **s** un entero entre 1 y n. El **problema de selección** consiste en encontrar el elemento que se encontraría en la posición **s** si el array estuviera ordenado.

T

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	9	2	5	4	3	4	10	1	6

- Si $s = \lceil n/2 \rceil$, entonces tenemos el problema de encontrar la **mediana** de T, es decir el valor que es mayor que la mitad de los elementos de T y menor que la otra mitad.
- ¿Cómo resolverlo?

2.3.4. El problema de selección.

- **Forma sencilla** de resolver el problema de selección:
  1. Ordenar T y devolver el valor T[s]
  2. Esto requeriría $\Theta(n \log n)$
- ¡Igual de complejo que una ordenación completa!
- Pero sólo necesitamos "ordenar" uno...
- **Idea:** usar el procedimiento **pivote** de QuickSort.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	x	x ≤	Z	≤ y	y	y	y	y	y

L

2.3.4. El problema de selección.

- Utilizando el procedimiento **Pivote** podemos resolverlo en O(n)...

Selección (T: array [1..n] de entero; s: entero)
var i, j, l: entero

```
    i:= 1
    j:= n
    repetir
        Pivote (i, j, l)
        si s < l entonces
            j:= l - 1
        sino si s > l entonces
            i:= l+1
    hasta l==s
    devolver T[l]
```

2.3.4. El problema de selección.

- Se trata de un **algoritmo de reducción**: el problema es descompuesto en un solo subproblema de tamaño menor.
- El procedimiento es no recursivo.

- En el **mejor caso**, el subproblema es de tamaño **n**/2:
  $t(n) = t(n/2) + a\cdot n$; $t(n) \in O(n)$

- En el **peor caso** (array ordenado) el subproblema es de tamaño n-1:
  $t(n) = t(n-1) + a\cdot n$; $t(n) \in O(n^2)$

- En el **caso promedio** el tiempo del algoritmo es un O(n).

2. Conclusiones.

- **Idea básica Divide y Vencerás:** dado un problema, descomponerlo en partes, resolver las partes y juntar las soluciones.
- Idea muy sencilla e intuitiva, pero...
- ¿Qué pasa con los problemas reales de interés?
  - Pueden existir muchas formas de descomponer el problema en subproblemas → Quedarse con la mejor.
  - Puede que no exista ninguna forma viable, los subproblemas no son independientes → Descatar la técnica.
- Divide y vencerás requiere la existencia de un **método directo** de resolución:
  - Tamaños pequeños: solución directa.
  - Tamaños grandes: descomposición y combinación.
  - ¿Dónde establecer el límite pequeño/grande?