# Programa de teoría

## AED I. Estructuras de Datos.

1. Abstracciones y especificaciones.
2. Conjuntos y diccionarios.
3. **Representación de conjuntos mediante árboles.**
4. Grafos.

## AED II. Algorítmica.

1. Análisis de algoritmos.
2. Divide y vencerás.
3. Algoritmos voraces.
4. Programación dinámica.
5. Backtracking.
6. Ramificación y poda.



## AED I: ESTRUCTURAS DE DATOS

# Tema 3. Representación de conjuntos mediante árboles.

3.1. Árboles Trie.

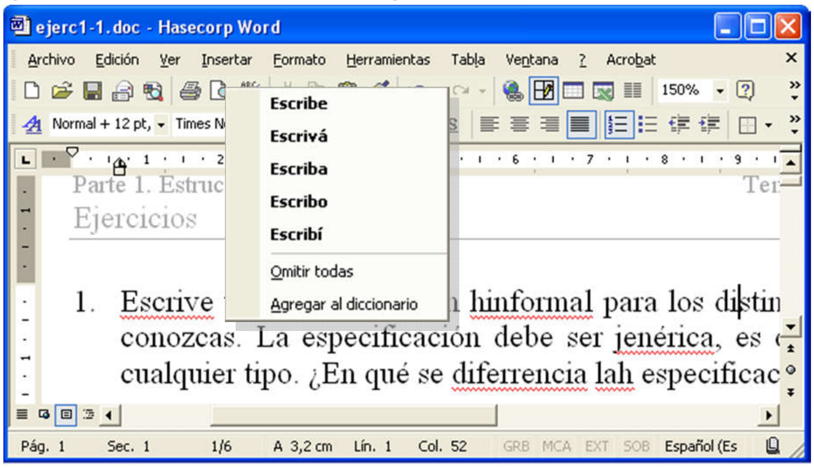
3.2. Relaciones de equivalencia.

3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

3.4. Árboles B.

## 3.1. Árboles Trie.

- **Aplicación**: representación de diccionarios (o en general conjuntos) grandes de palabras.
- **Ejemplo**. Corrector ortográfico interactivo.





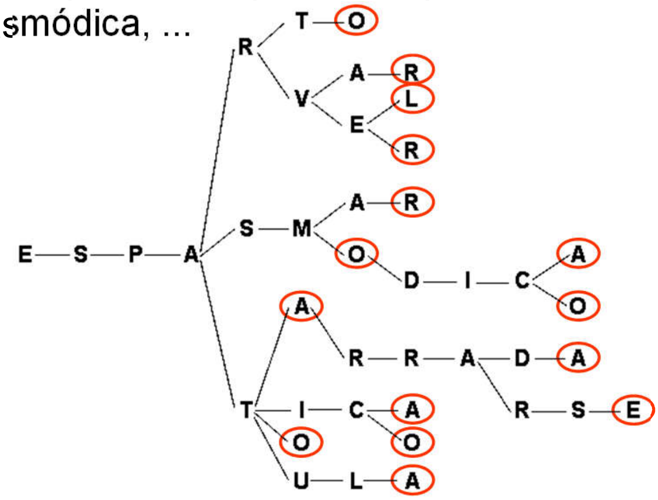

## 3.1. Árboles Trie.

- **Diccionario español:** ~ 3 millones de palabras.
- Muchas palabras → Mucha memoria y operaciones lentas.
- Pero la búsqueda de una palabra no puede tardar más de 1 milisegundo...

... esparto esparvar esparvel esparver espasmar espasmo espasmódica espasmódico espata espatarrada espatarrarse espática espático espato espátula espatulomancia espaviento espavorecida espavorecido espavorida espavorido espay especería especia especial ...

# 3.1. Árboles Trie.

- **Idea**: muchas palabras tienen prefijos comunes. P. ej.: espasmar, espasmo, espasmódico, espasmódica, ...



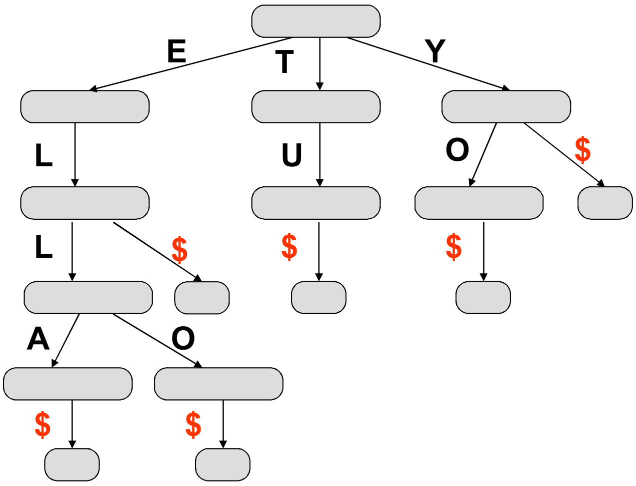



# 3.1. Árboles Trie.

- Un Trie es, básicamente, un árbol de prefijos.
- Sea **A** un alfabeto. Por ejemplo A= {a, b, c, ..., z}
- Añadimos a **A** una marca de fin de palabra: **$**.
- **Definición:** un **Trie** es una estructura de árbol en la que:
  1. La **raíz** del árbol representa la cadena vacía.
  2. Un nodo puede tener tantos hijos como caracteres del alfabeto **A** más uno. Cada hijo está etiquetado con un carácter o una marca de fin $.
  3. La sucesión de etiquetas desde la raíz hasta un nodo hoja, etiquetado con la marca de fin $, representa una **palabra**.
  4. A todos los nodos, excepto a la raíz y a las hojas etiquetadas con $, se les denomina **prefijos** del árbol.

# 3.1. Árboles Trie.

- Ejemplo, C= {ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO}

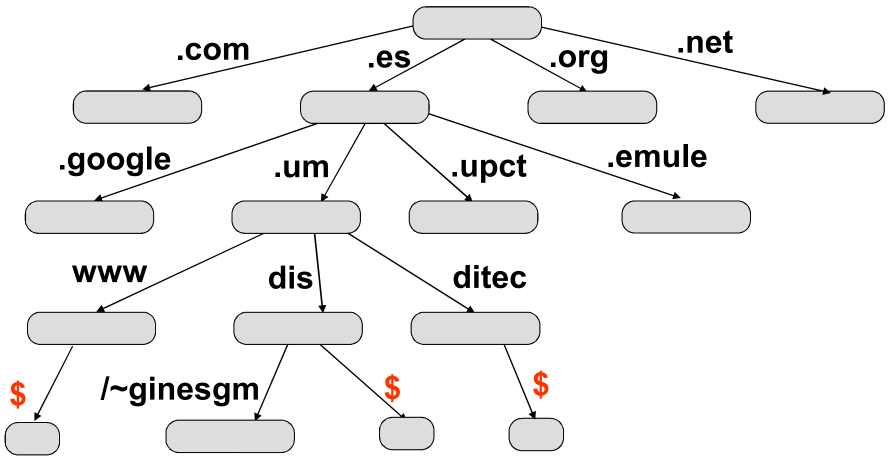



- ¿Cómo usarlo en el corrector interactivo?



# 3.1. Árboles Trie.

- Se pueden representar otros tipos de información, cambiando el alfabeto **A**.
- Ejemplo: representación de URL de páginas web.



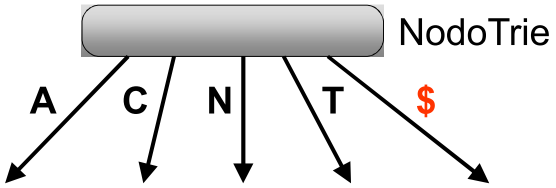
## 3.1.1. Representación de tries.

- **Cuestión:** ¿Cómo representar árboles trie?

  **tipo**

  ArbolTrie[A]= Puntero[NodoTrie[A]]

- **Reformulamos** la pregunta: ¿Cómo representar los **nodos** del árbol trie?






## 3.1.1. Representación de tries.

- Un **NodoTrie[A]** es un **Diccionario**[*tclave*, *tvalor*], donde *tclave*= A y *tvalor*= Puntero[NodoTrie[A]]
- **Operaciones**:

  **Consulta**(**n**:NodoTrie[A]; **car**:A):Puntero[NodoTrie[A]]

  **Inserta** (**var n**: NodoTrie[A]; **car**: A)

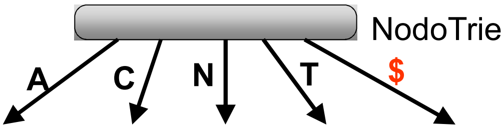
  **PonMarca** (**var n**: NodoTrie[A])

  **QuitaMarca** (**var n**: NodoTrie[A])

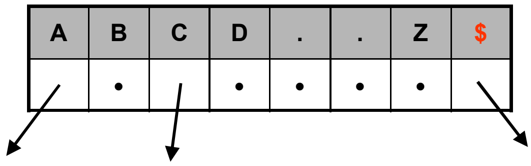
  **HayMarca** (**n**: NodoTrie[A]) : Bool

  **para cada** car **hijo del nodo** n **hacer**
  acción

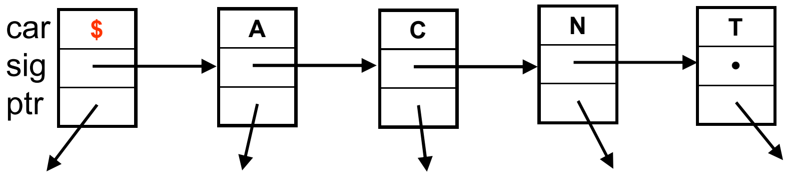
## 3.1.1. Representación de tries.




- **Representación** mediante arrays.



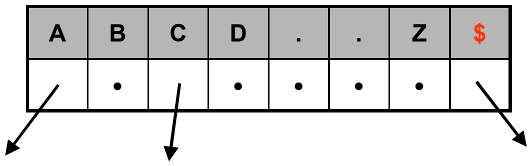

- **Representación** mediante listas con nodo cabecera.






## 3.1.1. Representación de tries.

- **Representación** mediante arrays.



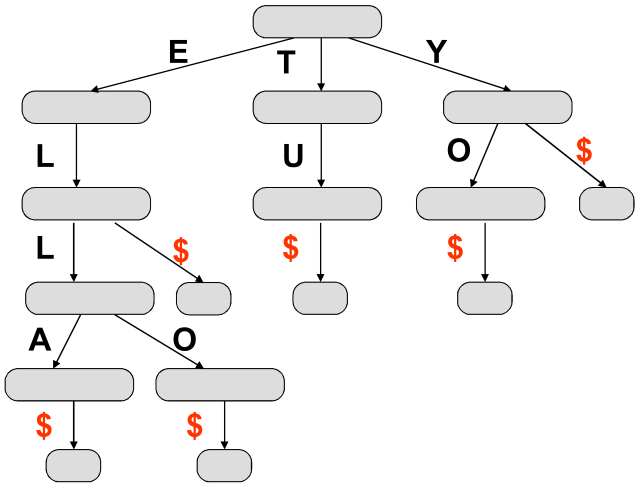

**tipo**

NodoTrie[A]= **array** [A] **de** Puntero[NodoTrie[A]]

- **Ventaja**: acceso muy rápido a los valores.
- **Inconveniente**: desperdicia muchísima memoria.

# 3.1.1. Representación de tries.

- Ejemplo, C= {ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO}

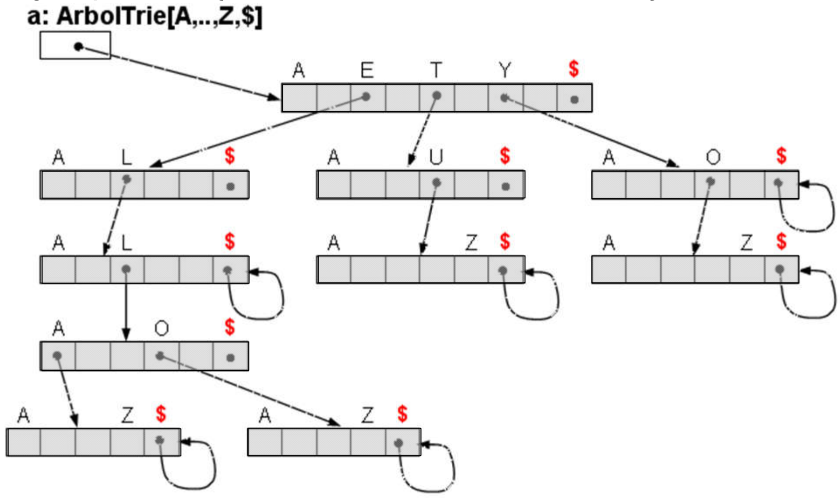





# 3.1.1. Representación de tries.

- Ejemplo, C= {ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO}

**a: ArbolTrie[A,..,Z,$]**



## 3.1.1. Representación de tries.

**Consulta** (**n**: NodoTrie[A]; **car**: A): Puntero[NodoTrie[A]]
  **devolver** n[car]

**Inserta** (**var n**: NodoTrie[A]; **car**: A)
  n[car]:= NUEVO NodoTrie[A]

**PonMarca** (**var n**: NodoTrie[A])
  n[$]:= PunteroA(n)   *// Un puntero no nulo cualquiera*

**QuitaMarca** (**var n**: NodoTrie[A])
  n[$]:= NULO

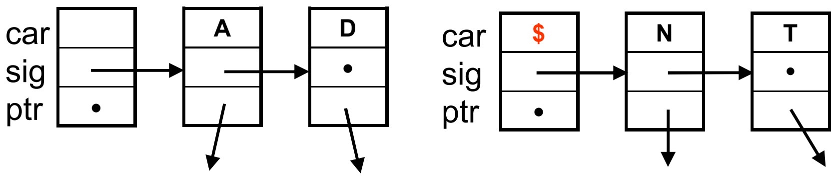
**HayMarca** (**n**: NodoTrie[A]) : Bool
  **devolver** n[$] ≠ NULO

- Se supone que al crear un nodo se inicializa todo a NULO.
- ¿Cómo sería el iterador: **para cada** car **hijo de** n **hacer**…?



## 3.1.1. Representación de tries.

**- Representación** mediante listas con nodo cabecera.

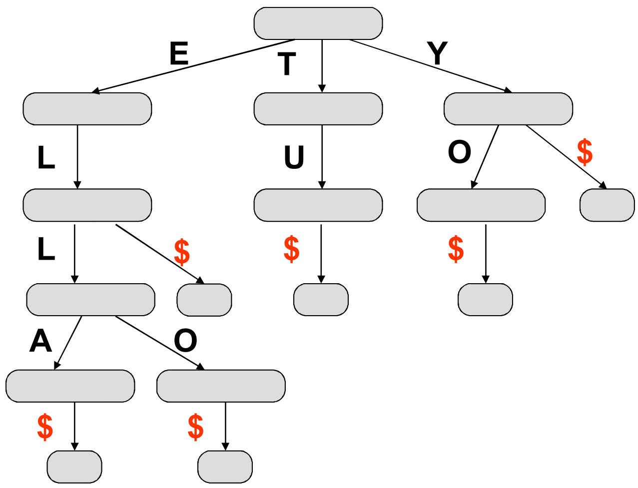



**tipo** NodoTrie[A]= **registro**
    car: A
    sig, ptr: Puntero[NodoTrie[A]]
  **finregistro**

- **Ventaja**: uso razonable de memoria.
- **Inconveniente**: operaciones más lentas.

## 3.1.1. Representación de tries.

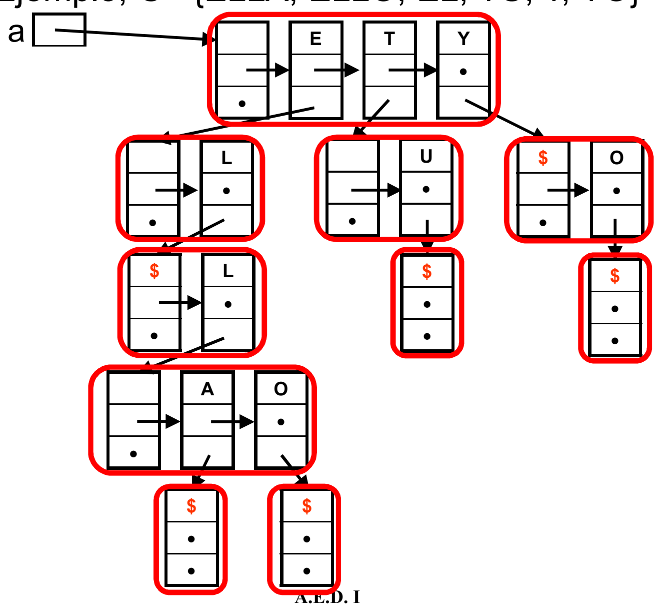
- Ejemplo, C= {ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO}






## 3.1.1. Representación de tries.

- Ejemplo, C= {ELLA, ELLO, EL, TU, Y, YO}



## 3.1.1. Representación de tries.

**Consulta** (**n**: NodoTrie[A]; **c**: A): Puntero[NodoTrie[A]]

tmp:= n→sig
**mientras** tmp ≠ NULO AND tmp→car < c **hacer**
  tmp:= tmp→sig
**si** tmp ≠ NULO AND tmp→car == c **entonces**
  **devolver** tmp→ptr
**sino**
  **devolver** NULO

**Inserta** (**var n**: NodoTrie[A]; **c**: A)

1. Recorrer la lista buscando el carácter **c**
2. Si se encuentra, no se hace nada (ya está insertado)
3. En otro caso, añadir un nuevo nodo en la posición adecuada, con el carácter **c** y un puntero a un nuevo nodo



## 3.1.1. Representación de tries.

**Inserta** (**var n**: NodoTrie[A]; **c**: A)

tmp:= PunteroA(n)
**mientras** tmp→sig ≠ NULO AND tmp→sig→car < c **hacer**
  tmp:= tmp→sig
**si** tmp→sig == NULO OR tmp→sig→car ≠ c **entonces**
  tmp→sig:= NUEVO NodoTrie[A](c, tmp→sig,
                NUEVO NodoTrie[A])

**PonMarca** (**var n**: NodoTrie[A])
n.car:= '$'

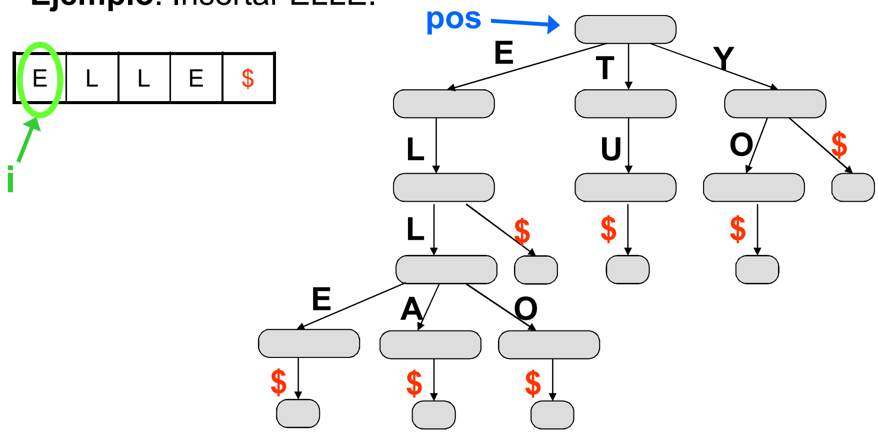
**QuitaMarca** (**var n**: NodoTrie[A])
n.car:= '  '

**HayMarca** (**n**: NodoTrie[A]) : Bool
**devolver** n.car == '$'

- ¿Cómo sería el iterador **para cada carácter**…?

## 3.1.2. Operaciones con tries.

- Utilizando la representación de nodos trie (con listas o con arrays) implementar las operaciones de inserción, eliminación y consulta sobre el trie.
- **Ejemplo**. Insertar ELLE.






## 3.1.2. Operaciones con tries.

```
operación Inserta (var a: ArbolTrie[A]; s: cadena)
var pos: Puntero[NodoTrie[A]]
    i:= 1
    pos:= a
    mientras s[i] ≠ $ hacer
        si Consulta (pos, s[i]) == NULO entonces
            Inserta (pos, s[i])
        pos:= Consulta (pos, s[i])
        i:= i + 1
    finmientras
    PonMarca (pos)
```

- Modificar el procedimiento para que haga una consulta.
- Si queremos añadir información asociada a cada palabra, ¿dónde debería colocarse?
- ¿Cómo listar todas las palabras del trie (en orden)?

## 3.1.2. Operaciones con tries.

**operación** ListarTodas (**var** n: ArbolTrie[A], palabra: cadena)
    **para cada** car **hijo del nodo** n **hacer**
        **si** car == $ **entonces** Escribir(palabra)
        **sino** ListarTodas(Consulta(n, car), palabra+car)
    **finpara**

- Llamada inicial: **ListarTodas(raiz, "")**
- ¿Cómo sería el uso del trie en el corrector interactivo?
- **Empezar una palabra**
  Colocar **pos** en la raíz del árbol
- **Pulsar una tecla c en una palabra**
  Si Consulta (pos, c) == NULO entonces la palabra es incorrecta, en otro caso moverse en el árbol
- **Acabar una palabra**
  Si HayMarca (pos) == FALSE entonces la palabra es incorrecta, en otro caso es correcta



## 3.1.3. Evaluación de los tries.

### Tiempo de ejecución

- El principal factor en el tiempo de ejecución es la longitud de las palabras: **m**.
- Nodos con **arrays**: **O(m)**
- Nodos con **listas**: **O(m*s)**, donde **s** es la longitud promedio de las listas. En la práctica, ~ **O(m)**.
- ¿Cómo es el tiempo en comparación con las tablas de dispersión?
- En el caso del corrector interactivo, la eficiencia es aún más interesante.

## 3.1.3. Evaluación de los tries.

### Uso de memoria

- Longitud promedio de las palabras: **m**. Longitud total: **l**
- Número de palabras: **n.** Número total de prefijos: **p**
- $\mathbf{k_1}$ bytes/puntero, $\mathbf{k_2}$ bytes/carácter
- **d** caracteres en el alfabeto (incluido $)
- **n << p << l**

- **Nodos con arrays: (p + 1)·d·$k_1$ bytes** →
  - **p + 1** nodos en el árbol
  - **d·$k_1$** bytes por nodo
- **Nodos con listas: (2p + 1)·(2$k_1$ + $k_2$) bytes** →
  - **2p + 1** nodos en el árbol
  - **2$k_1$ + $k_2$** bytes por nodo



## 3.1.3. Evaluación de los tries.

### Uso de memoria

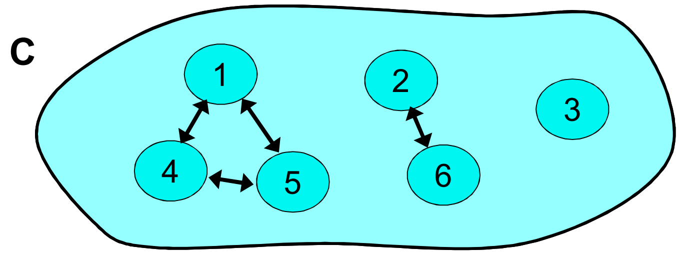
- **Con listas simples: 2$k_1$·n + $k_2$·l bytes**
- La eficiencia de memoria depende de la relación **l/p**
  - Si **l/p** es grande: las palabras comparten muchos prefijos.
  - Si **l/p** es pequeña: hay pocos prefijos compartidos y se gasta mucha memoria.
- En la práctica, mejora ≈ l/p > 6

### Conclusiones

- La estructura es adecuada en aplicaciones donde aparezcan muchos prefijos comunes.
- El tiempo de ejecución sólo depende (casi) de la longitud de las palabras, ¡independientemente de cuántas hayan!

## 3.2. Relaciones de equivalencia.

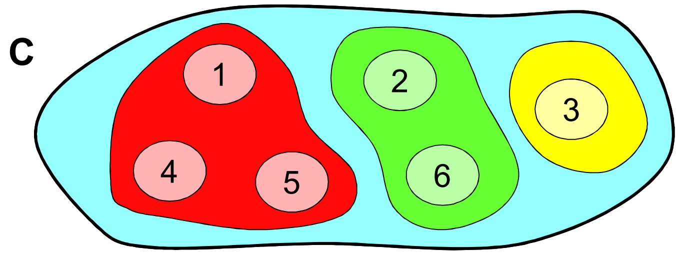
- **Definición:** Una **relación de equivalencia** en un conjunto **C** es una relación **R** que satisface:
  - **Reflexiva:** a R a, ∀ a ∈ C.
  - **Simétrica:** a R b ⇔ b R a.
  - **Transitiva**: Si (a R b) y (b R c) entonces a R c.
- **Ejemplos:** relación de ciudades en el mismo país, alumnos del mismo curso, sentencias del mismo bloque.






## 3.2. Relaciones de equivalencia.

- **Definición:** La **clase de equivalencia** de un elemento **a** ∈ **C**, es el subconjunto de **C** que contiene todos los elementos relacionados con **a**.
- Las clases de equivalencia forman una **partición** de **C** (subconjuntos disjuntos y completos).



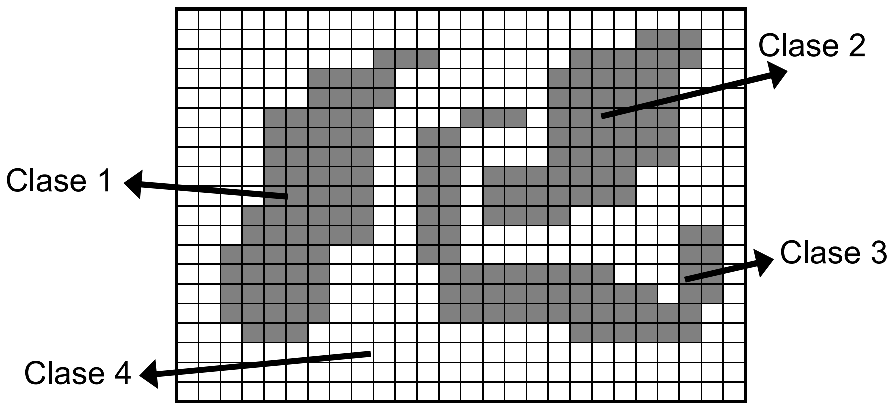
## 3.2. Relaciones de equivalencia.

- Definimos un **TAD** para las relaciones de equivalencia, sobre un conjunto C.
- **Operaciones:**
  - **Crear (C: Conjunto[T]) : RelEquiv[T]**
    Crea una relación vacía, en la que cada elemento es una clase de equivalencia en sí mismo.
  - **Unión (var R: RelEquiv[T]; a, b: T)**
    Combina dos clases de equivalencia (las de **a** y **b**) en una nueva. Es una unión de conjuntos disjuntos.
  - **Encuentra (R: RelEquiv[T]; a: T) : T**
    Devuelve la clase a la que pertenece **a**.
- **Ojo:** el "nombre" de la clase es también de tipo T. Puede ser un elemento cualquiera de esa clase.



## 3.2. Relaciones de equivalencia.

- **Ejemplo de aplicación:** procesamiento de imágenes.
- **Relación:** Dos píxeles están relacionados si son adyacentes y tienen el mismo color.



## 3.2. Relaciones de equivalencia.

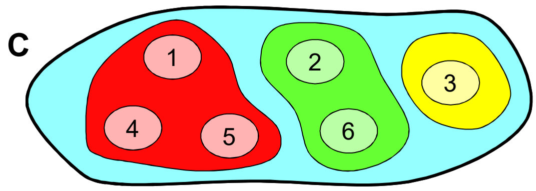
- Imagen de 800 x 600 = 480.000 píxeles
- El conjunto contiene medio millón de elementos. Las operaciones Unión y Encuentra son muy frecuentes.

- **Observaciones:**
  - Sólo es necesario conocer en qué clase de equivalencia está cada elemento.
  - El nombre de la clase es arbitrario, lo que importa es que **Encuentra(x)** = **Encuentra(y)** si y sólo si **x** e **y** están en la misma clase de equivalencia.

- ¿Cómo implementar el tipo Relación de Equivalencia de forma eficiente?



## 3.2.1. Representaciones sencillas.




- **Representación mediante un array.** Para cada elemento **i** indicar la clase a la que pertenece.

**R : array** [1..6]

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |

## 3.2.1. Representaciones sencillas.

**Representaciones mediante un array**

- **Encuentra (R: RelEquiv[T]; a: T) : T**
  **devolver** R[a]

- **Unión (var R: RelEquiv[T]; a, b: T)**
  Recorrer todo el array, cambiando donde ponga **b** por **a**...

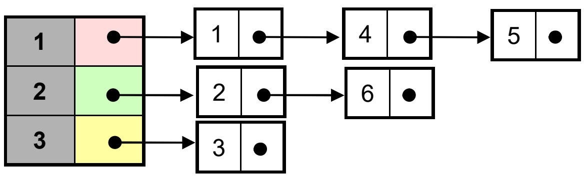
- **Resultado:**
  - La búsqueda de la clase de equivalencia es muy rápida.
  - La unión de clases de equivalencia es muy lenta.



## 3.2.1. Representaciones sencillas.

**Representaciones mediante listas de clases**

- Para cada clase una lista de sus miembros.




- **Unión (var R: RelEquiv[T]; a, b: T)**
  Concatenar dos listas. Se puede conseguir en un **O(1)**, con una representación adecuada de las listas.

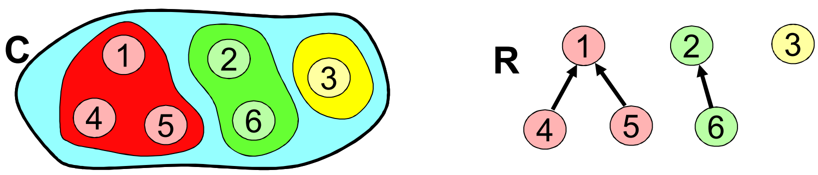
## 3.2.1. Representaciones sencillas.

**Representaciones mediante listas de clases**

- **Encuentra (R: RelEquiv[T]; a: T) : T**
  Recorrer todas las listas hasta encontrar **a**. El tiempo es **O(N)**, siendo **N** el número de elementos.
- **Resultado:**
  - La unión de clases de equivalencia es muy rápida.
  - La búsqueda de la clase de equivalencia es muy lenta.
- **Solución:** usar una estructura de árboles.
  - Un árbol para cada clase de equivalencia.
  - El nombre de la clase viene dado por la raíz del árbol.

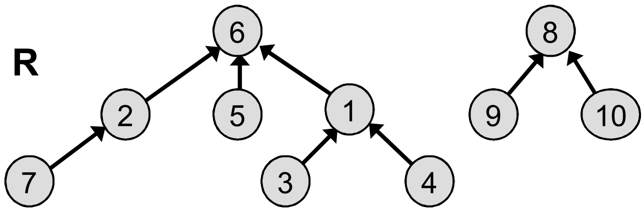


## 3.2.2. Representación mediante árboles.




- Usamos una representación de árboles mediante **punteros al padre**.
  **tipo**
  RelEquiv[N] = **array** [1..N] **de** entero
- **R[x]** == 0, si **x** es una raíz del árbol.
- En otro caso, **R[x]** contiene el padre de **x**.

## 3.2.2. Representación mediante árboles.




**R :** Rel-Equiv[10]

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 1 | 1 | 6 | 0 | 2 | 0 | 8 | 8 |

- **Unir dos clases (raíces):** apuntar una a la otra.
- **Buscar la clase de un elemento:** subir por el árbol hasta llegar a la raíz.
- ±



## 3.2.2. Representación mediante árboles.

**operación** Crear (N: entero) : RelEquiv[N]
  **para cada** i:= 1, ..., N **hacer**
    R[i]:= 0
  **devolver** R

**operación** Unión (**var** R: RelEquiv[N]; a, b: entero)
  R[a]:= b

**operación** Encuentra (R: RelEquiv[N]; a: entero) : entero
  **si** R[a]==0 **entonces**
    **devolver** a
  **sino devolver** Encuentra (R, R[a])

- El procedimiento **Unión** supone que **a** y **b** son raíces de los árboles. ¿Cómo sería la operación si no lo son?

## 3.2.2. Representación mediante árboles.

- **Ejemplo.** Iniciar una relación R[6] vacía y aplicar: Unión(3, 4), Unión (6, 5), Unión (4, 5), Unión (5, 2), Unión (2, 1).

**R :** Rel-Equiv[10]

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |




## 3.2.2. Representación mediante árboles.

**Eficiencia de las operaciones**

- La operación **Unión** tiene un **O(1)**.
- En el caso promedio la operación **Encuentra** es de orden menor que **O(log N)**.
- Sin embargo, en el peor caso los árboles son cadenas y el coste es **O(N)**.

- Debemos garantizar que los árboles sean lo más anchos posible.
- **Idea:** Al unir **a** y **b** se puede poner **a** como hijo de **b**, o al revés. **Solución:** Colocar el menos alto como hijo del más alto.

## 3.2.3. Balanceo del árbol y compresión.

- **Modificación:** Si un nodo **x** es raíz, **R[x]** indica (con números negativos) la profundidad de su árbol.
- Al unir dos raíces, apuntar la de menor profundidad a la de mayor (**balanceo del árbol**).

```
operación Unión (var R: RelEquiv[N]; a, b: entero)
    si R[a] < R[b] entonces R[b]:= a
    sino
        si R[a]==R[b] entonces
            R[b]:= R[b] – 1
        finsi
        R[a]:= b
    finsi
```



## 3.2.3. Balanceo del árbol y compresión.

- **Ejemplo.** Iniciar una relación R[6] vacía y aplicar: Unión(3, 4), Unión (6, 5), Unión (4, 5), Unión (5, 2), Unión (1, 5).

**R :** Rel-Equiv[10]

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

## 3.2.3. Balanceo del árbol y compresión.

- **Segunda idea:** Si aplicamos Encuentra(R, a) y encontramos que la clase de a es x, podemos hacer R[a]:= x **(compresión de caminos)**.

**operación** Encuentra (R: RelEquiv[N]; a: entero) : entero
    **si** R[a] ≤ 0 **entonces**
        **devolver** a
    **sino**
        R[a]:= Encuentra (R, R[a])
        **devolver** R[a]
    **finsi**

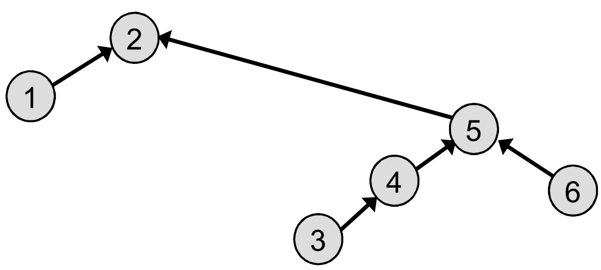


## 3.2.3. Balanceo del árbol y compresión.

- **Ejemplo.** Aplicar Encuentra(R,3), Encuentra(R,6).

**R :** Rel-Equiv[10]

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | -3 | 4 | 5 | 2 | 5 |




- **Ojo.** No se recalcula la altura en la raíz.

## 3.2.3. Balanceo del árbol y compresión.

### Tiempo de ejecución

- El tiempo de la operación Unión es **O(1)**.
- El tiempo de Encuentra está entre **O(1)** y **O(log N)**.

### Conclusiones

- La estructura de datos usada es un array (exactamente igual que la solución sencilla).
- Pero ahora el array es manejado como un **árbol (árbol de punteros al padre)**.
- Para conseguir eficiencia es necesario garantizar que el árbol está **equilibrado**.

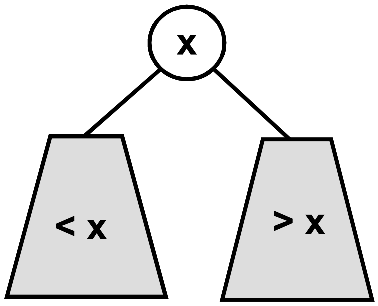


## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

- **Problema general de representación de conjuntos y diccionarios**:
  - **Tablas de dispersión:** Acceso rápido a un elemento concreto, pero recorrido secuencial u ordenado lento.
  - **Listas:** Recorrido secuencial eficiente, pero acceso directo muy lento.
  - **Arrays:** Problemas con el uso de memoria.
  - **Tries:** Específicos de aplicaciones donde aparecen muchos prefijos comunes.
- **Solución:** Utilizar árboles. En concreto, árboles de búsqueda.

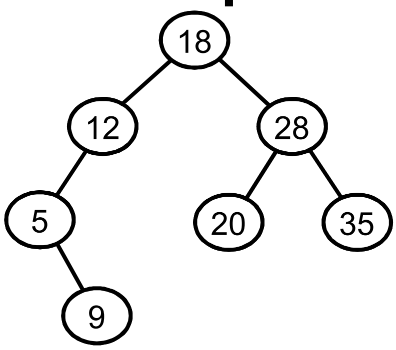
# 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

- **Árboles binarios de búsqueda (ABB).**
  - Cada nodo tiene cero, uno o dos hijos, denominados **hijo izquierdo** e **hijo derecho**.
  - Los hijos de un nodo **x** con valores menores que **x** se encuentran en el subárbol izquierdo y los mayores en el derecho.



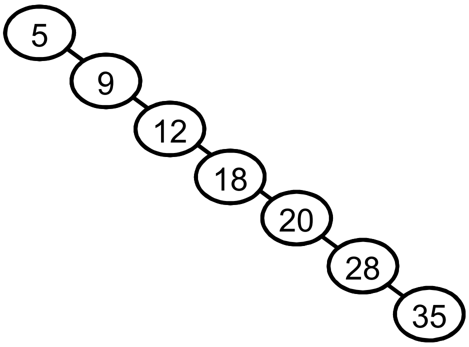



# 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.




- Son útiles para realizar búsqueda e inserción en **O(log n)** y recorrido ordenado en **O(n)**.
- **Inconveniente:** En el peor caso los árboles son cadenas y la búsqueda necesita **O(n)**.

## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

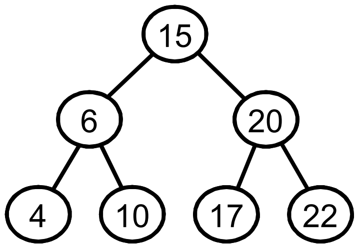



- **Conclusión:** Es necesario garantizar que el árbol está balanceado o equilibrado.
- **Condición de balanceo:** Basada en número de nodos o en altura de subárboles.

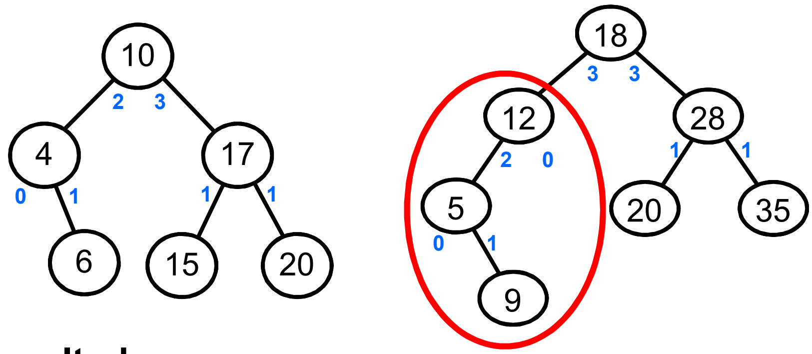


## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados. Árbol de búsqueda perfectamente balanceado

- **Definición:** Un **ABB perfectamente balanceado** es un ABB donde, para todo nodo, la cantidad de nodos de su subárbol izquierdo difiere como máximo en 1 de la cantidad de nodos del subárbol derecho.



## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

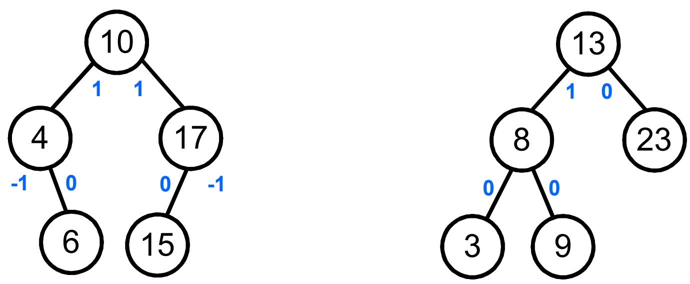



- **Resultado:**
  - La búsqueda es **O(log n)** en el peor caso.
  - Pero mantener la condición de balanceo es muy costoso. La inserción puede ser **O(n)**.



## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

- **Moraleja:** definir una condición de balanceo, pero menos exigente.
- **Definición de árbol balanceado ó AVL (Adelson-Velskii y Landis)**: Un **AVL** es un ABB donde, para todo nodo, la **altura** de sus subárboles difiere como máximo en 1.



## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

### Operaciones sobre un AVL

- La **búsqueda** en un AVL es exactamente igual que sobre un ABB.
- La **inserción** y **eliminación** son también como en un ABB, pero después de insertar o eliminar hay que comprobar la condición de balanceo.
  - Almacenar la altura de cada subárbol.
  - Inserción o eliminación normal (procedimiento recursivo).
  - Al volver de la recursividad, en los nodos por los que pasa, comprobar la condición de balanceo.
  - Si no se cumple, **rebalancear** el árbol.



## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

- **Definición del tipo de datos:**

**tipo**
ArbolAVL[T] = Puntero[NodoAVL[T]]
NodoAVL[T] = **registro**
clave: T
altura: entero
izq, der: Puntero[NodoAVL[T]]
**finregistro**

| altura | izq | clave | der |
|---|---|---|---|
| h | • | x | • |

**operación** Altura (A: Puntero[NodoAVL[T]]) : entero
**si** A == NULO **entonces devolver** -1
**sino devolver** A→altura

- **Uso de memoria:** un puntero más que con una lista... y un entero más, por nodo, que un ABB normal...

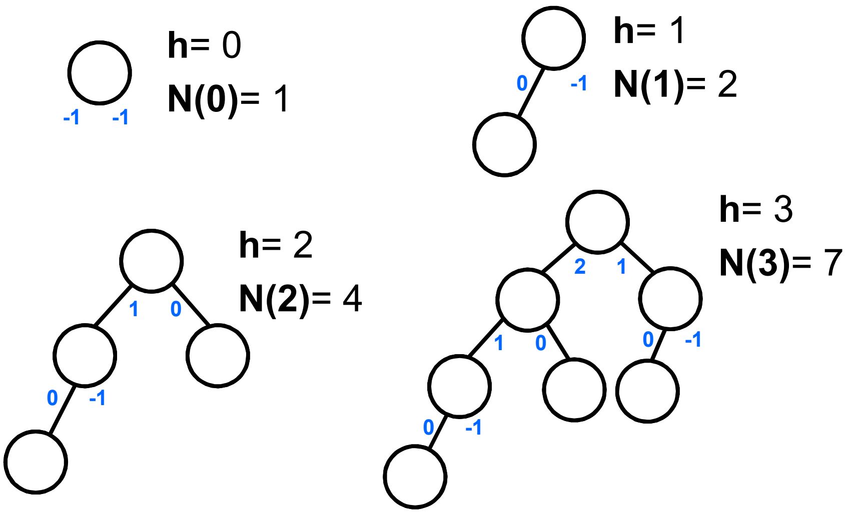
## 3.3.1. Peor caso de AVL.

- ¿Cuánto será el tiempo de ejecución de la búsqueda en un AVL en el peor caso, para **n** nodos?
- El tiempo será proporcional a la altura del árbol.
- **Cuestión:** ¿Cuál es la máxima altura del árbol para **n** nodos?
- Le **damos la vuelta** a la pregunta: ¿Cuál es el mínimo número de nodos para una altura **h**?



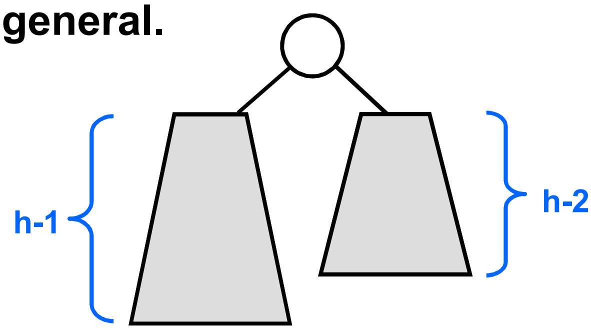
## 3.3.1. Peor caso de AVL.

- **N(h)**: Menor número de nodos para altura **h**.



## 3.3.1. Peor caso de AVL.

- **Caso general.**




- $N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1$
- Sucesión parecida a la de **Fibonacci**.
- **Solución:** $N(h) = C \cdot 1{,}62^h + \ldots$

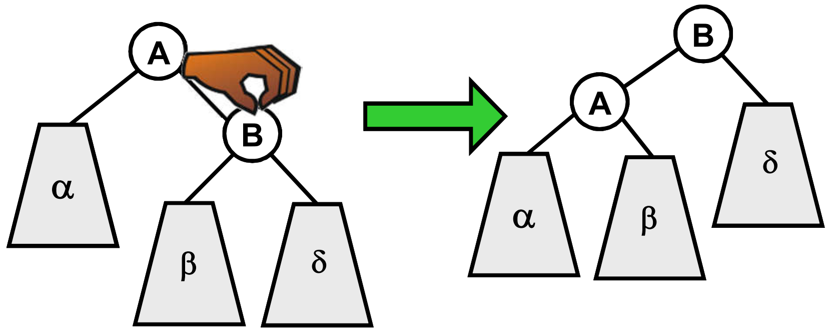


## 3.3.1. Peor caso de AVL.

- **Mínimo número de nodos para altura h:**
  $N(h) = C \cdot 1{,}62^h + \ldots$
- **Máxima altura para n nodos:**
  $h(N) = D \cdot \log_{1,62} n + \ldots$
- **Conclusión:**
  - En el peor caso, la altura del árbol es **O(log n)**.
  - Por lo tanto, la búsqueda es **O(log n)**.
  - Inserción y eliminación serán de **O(log n)** si el **rebalanceo** se puede hacer en **O(1)**.

## 3.3.2. Rotaciones en un AVL.

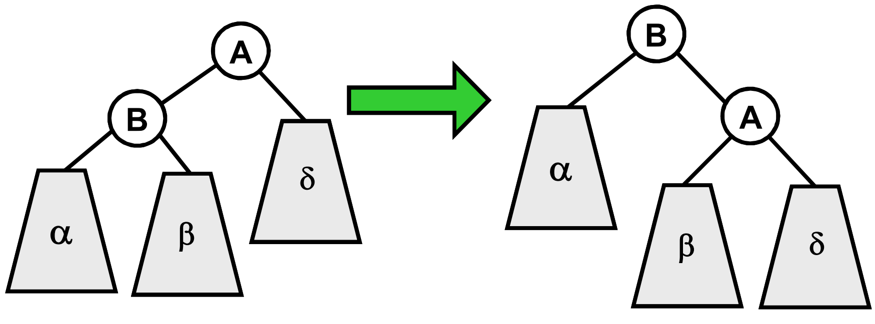
- Los rebalanceos en un AVL hacen uso de operaciones conocidas como **rotaciones en ABB**.
- **Rotación:** cambiando algunos punteros, obtener otro árbol que siga siendo un ABB.
- **RSD(A). Rotación simple a la derecha de un ABB**






## 3.3.2. Rotaciones en un AVL.

- **RSI(A). Rotación simple a la izquierda de un ABB**




- Programar las operaciones de rotación simple.

## 3.3.2. Rotaciones en un AVL.

**operación RSI (var A: Puntero[NodoAVL[T]])**

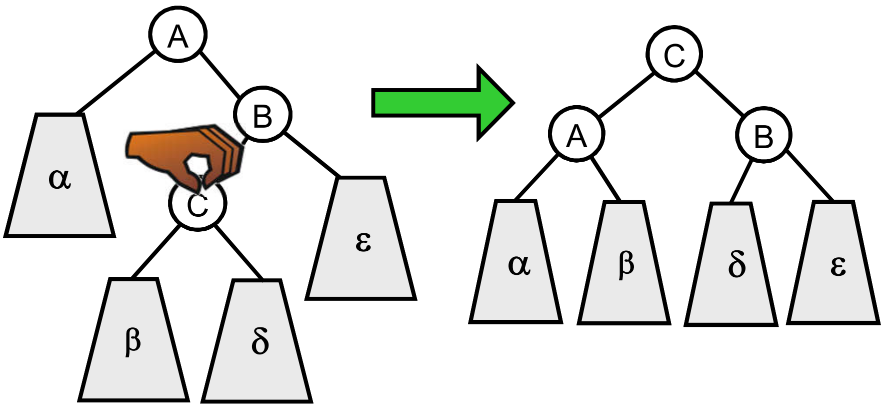
B:= A→izq
A→izq:= B→der
B→der:= A
A→altura:= 1+max(Altura(A→izq), Altura(A→der))
B→altura:= 1+max(Altura(B→izq), A→altura)
A:= B

- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución de una rotación simple?



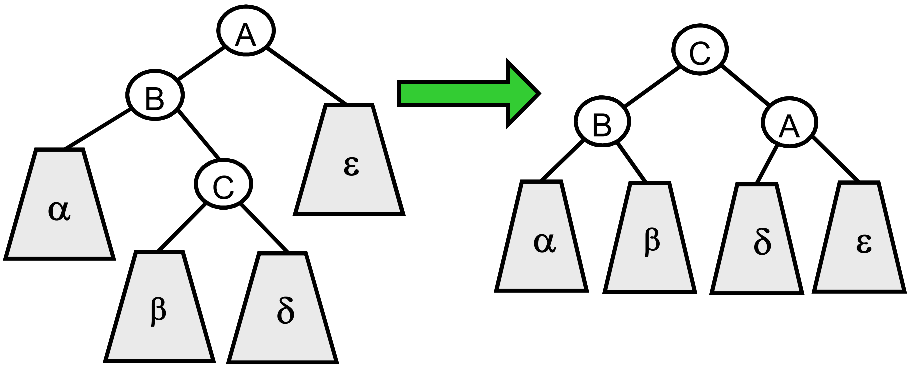
## 3.3.2. Rotaciones en un AVL.

- **RDD(A). Rotación doble a la derecha de un ABB**
  **Es equivalente a: RSI(A→der) + RSD(A)**



## 3.3.2. Rotaciones en un AVL.

- **RDI(A). Rotación doble a la izquierda de un ABB Es equivalente a: RSD(A→izq) + RSI(A)**

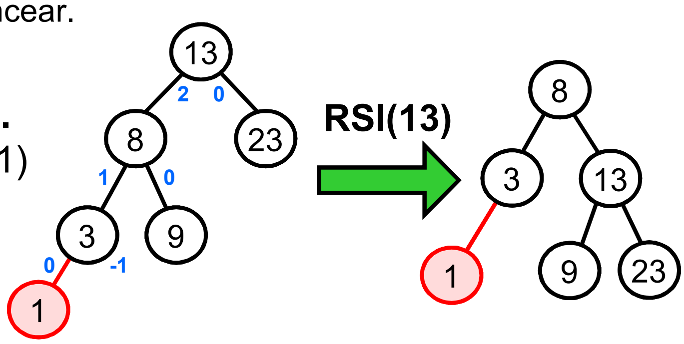



- Todas las rotaciones mantienen la estructura de ABB y son **O(1)**.



## 3.3.3. Operación de inserción en un AVL.

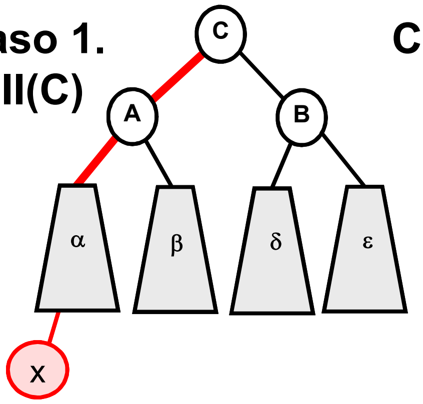
- Inserción normal como en un ABB.
- En cada nodo **A** (a la vuelta de la recursividad), si la altura del árbol no se modifica, acabar.
- Si la altura se incrementa en 1 entonces:
  - Si |Altura(A→izq) – Altura(A→der)|>1 entonces rebalancear.
- **Ejemplo.** Insertar(1)



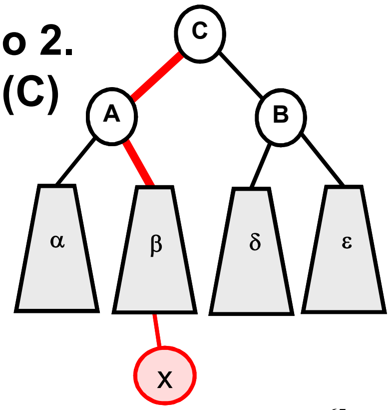
## 3.3.3. Operación de inserción en un AVL.

- ¿Qué rotación aplicar en cada caso de desbalanceo?
- Se pueden **predefinir 4 situaciones** diferentes, cada una asociada con un tipo de rotación.

**Caso 1. II(C)**




**Caso 2. ID(C)**

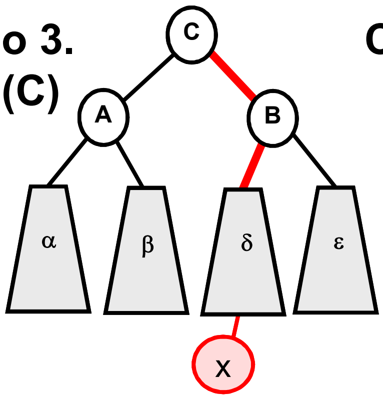




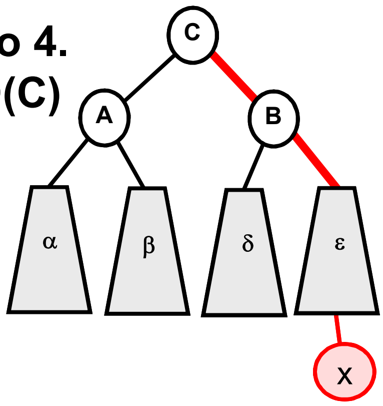

## 3.3.3. Operación de inserción en un AVL.

- ¿Qué rotación aplicar en cada caso de desbalanceo?
- Se pueden **predefinir 4 situaciones** diferentes, cada una asociada con un tipo de rotación.

**Caso 3. DI(C)**

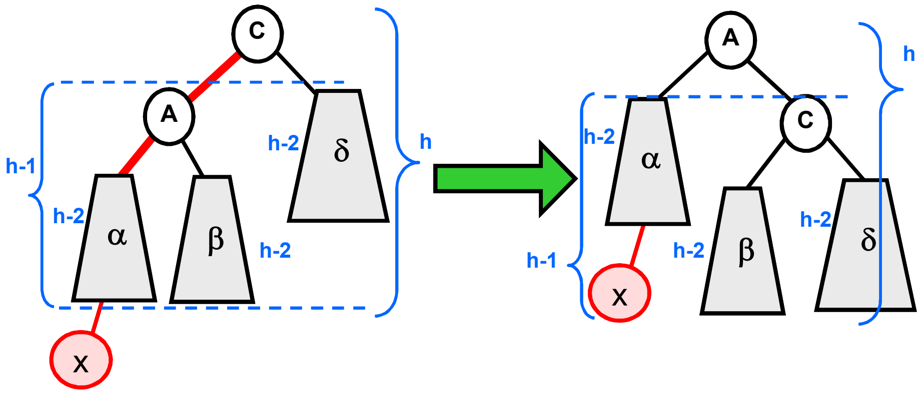



**Caso 4. DD(C)**



## 3.3.3. Operación de inserción en un AVL.

### Caso 1. II (C) Solución. RSI (C)

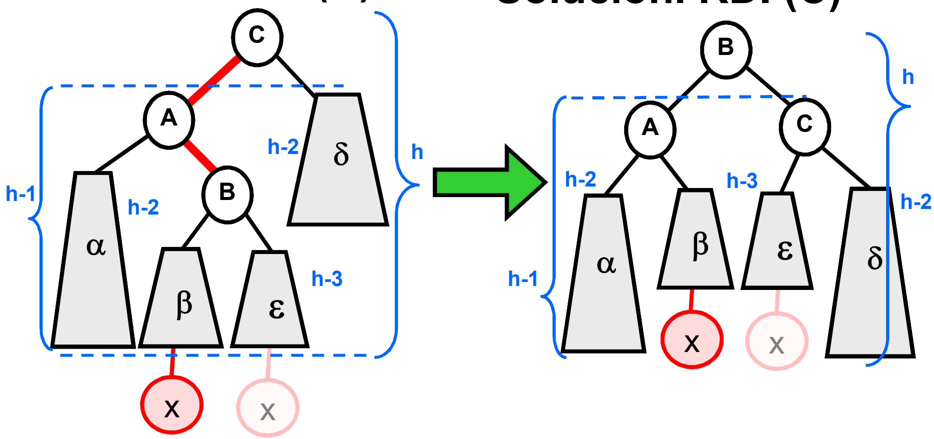



- El árbol resultante está balanceado.
- Adicionalmente, la altura del árbol no cambia.



## 3.3.3. Operación de inserción en un AVL.

### Caso 2. ID (C) Solución. RDI (C)




- La altura final del árbol tampoco cambia.

## 3.3.3. Operación de inserción en un AVL.

**operación Inserta (var A:Puntero[NodoAVL[T]]; x:T)**

```
si A == NULO entonces
    A:= NUEVO NodoAVL[T]
    A→clave:= x
    A→der:= A→izq:= NULO
    A→altura:= 0
sino  // Subárbol izquierdo
    si x < A→clave entonces
        ...   →   Inserta (A→izq, x)
                  si Altura(A→izq) –
                          Altura(A→der)>1 entonces
                      si x < A→izq→clave entonces
                          RSI (A)    // Caso II(A)
                      sino
                          RDI (A)    // Caso ID(A)
                      finsi
                  sino
                      A→altura:= 1+max(
                        Altura(A→izq), Altura(A→der))
                  finsi
sino  // Subárbol derecho
    si x > A→clave entonces
        ...
finsi
```



## 3.3.3. Operación de inserción en un AVL.

- El procedimiento sigue recursivamente hasta la raíz.
- Pero cuando se haga el primer balanceo no será necesario hacer otros balanceos. ¿Por qué?
- **Ejemplo**: Dado un árbol nuevo insertar 4, 5, 7, 2, 1, 3, 6.
- ¿Cuál es el orden de complejidad del algoritmo de Inserta?

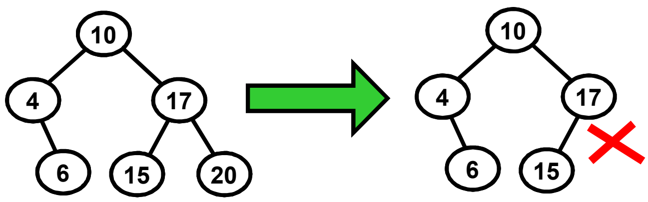
## 3.3.4. Operación de eliminación en un AVL.

- La **eliminación** de un nodo es algo más compleja. Hay más casos y puede ser necesario balancear en varios niveles distintos.
- **Algoritmo de eliminación:** Eliminación normal en ABB + comprobación de la condición.
- **Eliminación normal en un ABB**. Buscar el elemento a eliminar en el árbol.
  - Si es un nodo hoja se elimina directamente.
  - Si el nodo eliminado tiene un solo hijo, conectar el padre del nodo eliminado con ese hijo.
  - Si el nodo eliminado tiene dos subárboles, escoger el nodo más a la derecha del subárbol izquierdo (o el más a la izquierda del subárbol derecho).

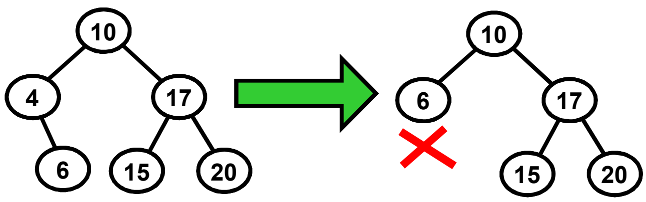


## 3.3.4. Operación de eliminación en un AVL.

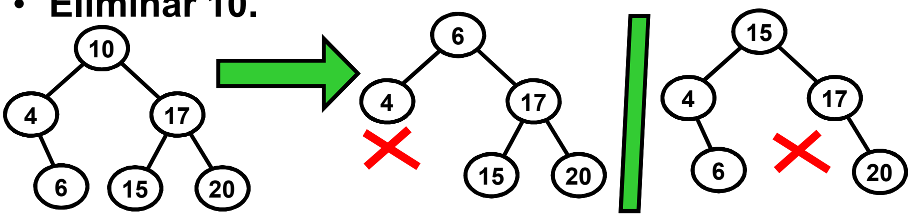
- **Eliminar 20.**




- **Eliminar 4.**

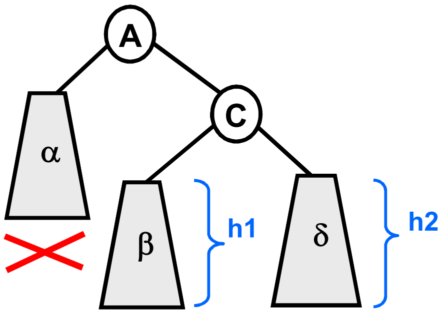



- **Eliminar 10.**



## 3.3.4. Operación de eliminación en un AVL.

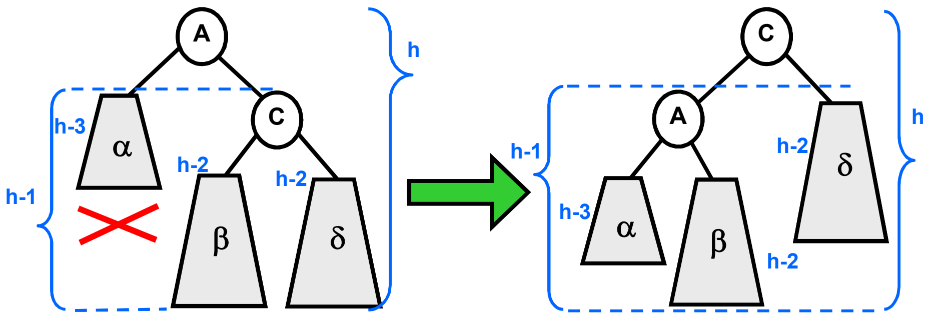
- Después de eliminar un nodo, volver a los nodos antecesores (recursivamente).
- Comprobar si cumple la condición de balanceo.
- En caso negativo **rebalancear**.
- Se pueden predefinir **3 casos** de eliminación en subárbol izquierdo, y los simétricos en subárbol derecho.
- **Ojo:** Los casos de desbalanceo en subárbol izquierdo de **A** dependen de las alturas **h1** y **h2** en el subárbol derecho.






## 3.3.4. Operación de eliminación en un AVL.

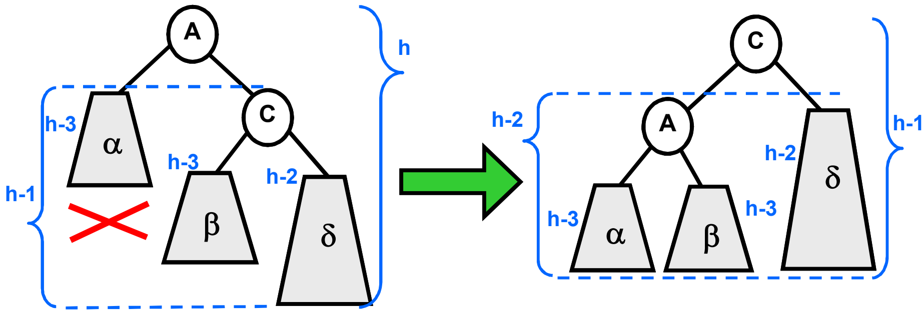
### Caso 1. h1=h2 Solución. RSD (A)




- El árbol resultante está balanceado.
- La altura del árbol no cambia.

## 3.3.4. Operación de eliminación en un AVL.

### Caso 2. h1<h2 Solución. RSD (A)

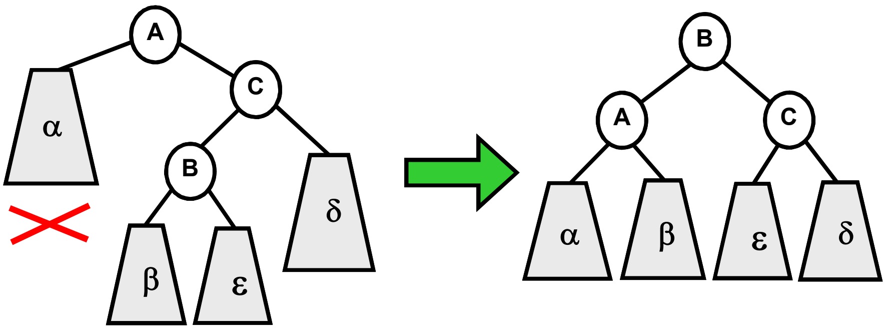



- En este caso, la altura del árbol disminuye en 1.



## 3.3.4. Operación de eliminación en un AVL.

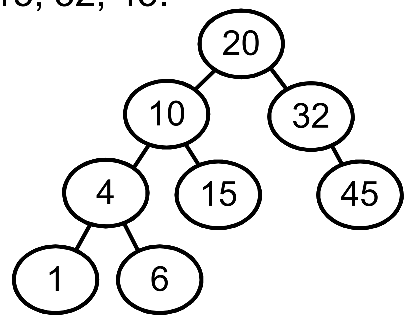
### Caso 3. h1>h2 Solución. RDD (A)




- Comprobar (mediante el cálculo de las alturas) que el árbol resultante está balanceado.
- La altura final del árbol disminuye en 1.

## 3.3.4. Operación de eliminación en un AVL.

- Ejercicio: implementar la operación de eliminación en un AVL.
- ¿Cuál es el orden de complejidad?
- **Ejemplo**: Dado el siguiente AVL, eliminar las claves: 4, 15, 32, 45.






## 3.3. Árboles de búsqueda balanceados.

**Conclusiones**:

- La idea de los árboles binarios de búsqueda está muy bien.
- Pero para que funcionen en todos los casos es necesario introducir condiciones de balanceo.
- **ABB sin balanceo:** mal eficiencia en peor caso.
- **Balanceo perfecto:** costoso mantenerlo.
- **AVL:** Todos los casos están en **O(log n)** y el balanceo es poco costoso.

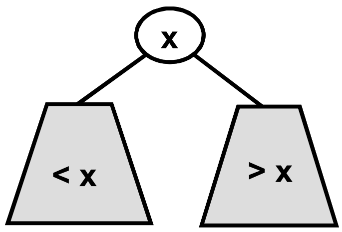
## 3.4. Árboles B.

- Los **árboles B** son muy usados en Bases de Datos.
- **Necesidades propias de las aplicaciones de BD:**
  - Muchos datos, básicamente conjuntos y diccionarios.
  - El acceso secuencial y directo deben ser rápidos.
  - Datos almacenados en memoria secundaria (disco) en bloques.
- Existen muchas variantes: árboles B, B+ y B*.
- **Idea:** Generalizar el concepto de árbol binario de búsqueda a **árboles de búsqueda n-arios**.



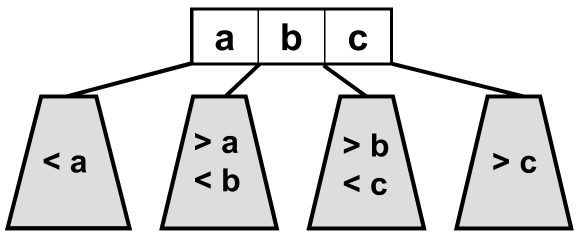
## 3.4. Árboles B.

**Árbol Binario de Búsqueda**




**Árbol de Búsqueda N-ario**

- En cada nodo hay **n** claves y **n+1** punteros a nodos hijos.



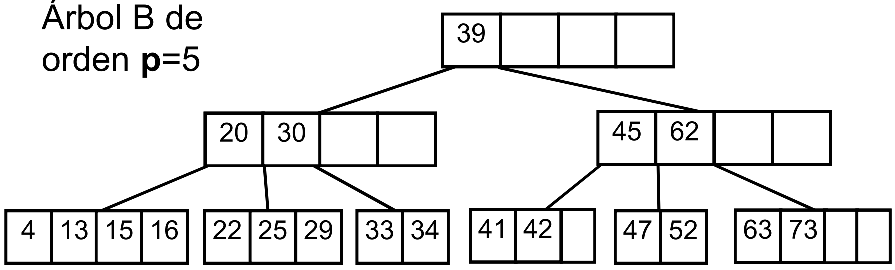
## 3.4. Árboles B.

- **Definición: Un árbol B de orden p** es un árbol n-ario de búsqueda, que cumple las siguientes propiedades:
  - **Raíz del árbol:** o bien no tiene hijos o tiene como mínimo tiene **2** y como máximo **p**.
  - **Nodos internos:** tienen entre $\lceil \mathbf{p/2} \rceil$ y **p** hijos.
  - **Nodos hoja:** todas las hojas deben aparecer al mismo nivel en el árbol (condición de balanceo).
- **Idea intuitiva:** Cada nodo tiene **p** posiciones (**p** punteros y **p-1** claves) que deben "llenarse" como mínimo hasta la mitad de su capacidad.



## 3.4. Árboles B.

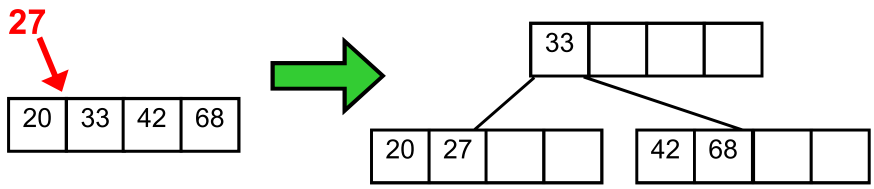
Árbol B de orden **p**=5




- **Búsqueda**: igual que en los árboles binarios, eligiendo la rama por la que seguir.
- La altura del árbol es ~ $\mathbf{log_{p/2}\, n}$, en el peor caso.

## 3.4. Árboles B.

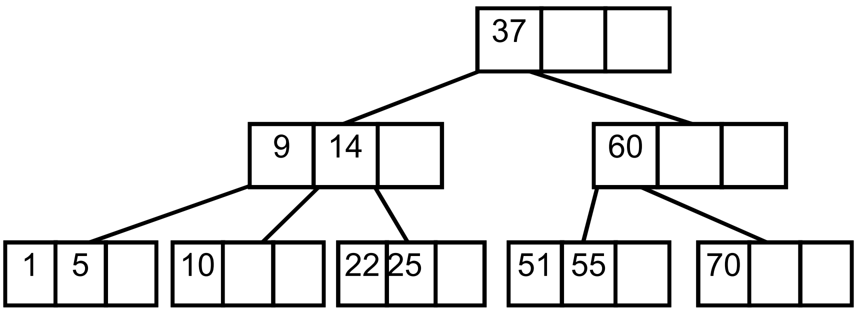
- **Inserción de entradas en un árbol B:** Buscar el nodo hoja donde se debería colocar la entrada.
  - **Si quedan sitios libres** en esa hoja, insertarlo (en el orden adecuado).
  - **Si no quedan sitios** (la hoja tiene **p-1** valores) partir la hoja en **2** hojas (con $\lceil$**(p-1)/2**$\rceil$ y $\lfloor$**(p-1)/2**$\rfloor$ nodos cada una) y añadir la mediana al nodo padre.
    - Si en el padre no caben más elementos, repetir recursivamente la partición de las hojas.






## 3.4. Árboles B.

- **Ejemplo:** En un árbol B de orden **p**=4, insertar las claves: 37, 14, 60, 9, 22, 51, 10, 5, 55, 70, 1, 25.




- ¿Cuál es el resultado en un árbol B de orden **p**=5?

## 3.4. Árboles B.

- **Eliminación de entradas en un árbol B:** Buscar la clave en el árbol.
  - **Nodo interno (no hoja):** Sustituirla por la siguiente (o la anterior) en el orden. Es decir, por la mayor de la rama izquierda, o la menor de la rama derecha.
  - **Nodo hoja:** Eliminar la entrada de la hoja.

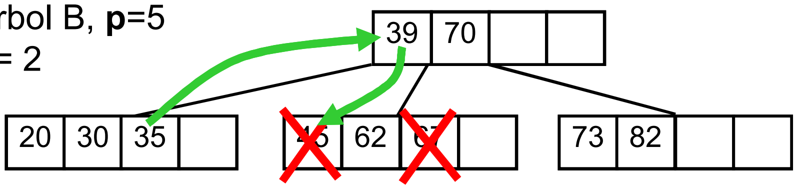
- **Casos de eliminación en nodo hoja. d = ⌊(p-1)/2⌋**
  - Nodo con más de **d** entradas: suprimir la entrada.
  - Nodo con **d** entradas (el mínimo posible): reequilibrar el árbol.



## 3.4. Árboles B.

- **Eliminación en nodo con d entradas**:
  - **Nodo hermano con más de d entradas:** Se produce un proceso de **préstamo** de entradas: Se suprime la entrada, la entrada del padre pasa a la hoja de supresión y la vecina cede una entrada al nodo padre.

Árbol B, **p**=5
**d**= 2

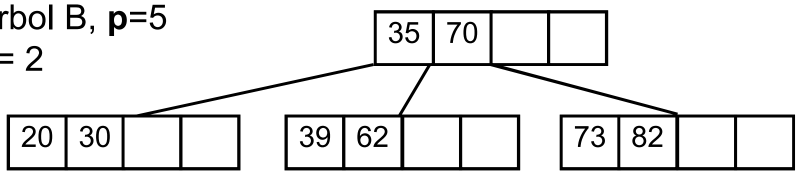



- **Ejemplo.** Eliminar 67, 45.

# 3.4. Árboles B.

- **Eliminación en nodo con d entradas**:
  - **Nodo hermano con más de d entradas:** Se produce un proceso de **préstamo** de entradas: Se suprime la entrada, la entrada del padre pasa a la hoja de supresión y la vecina cede una entrada al nodo padre.

Árbol B, **p**=5
**d**= 2



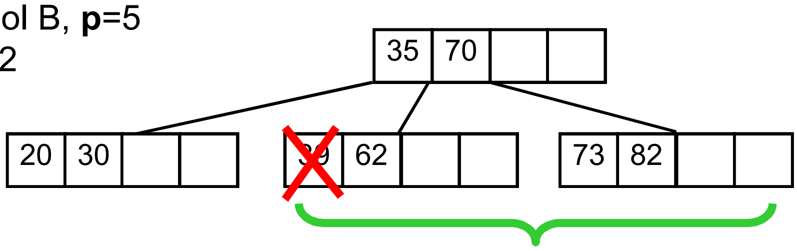

- **Ejemplo.** Eliminar 67, 45.



# 3.4. Árboles B.

- **Ningún hermano con más de d entradas:** Con la hoja donde se hace la supresión (**d-1** entradas) más una hoja hermana (**d** entradas) más la entrada del padre, se crea una nueva hoja con **2d** entradas.

Árbol B, **p**=5
**d**= 2

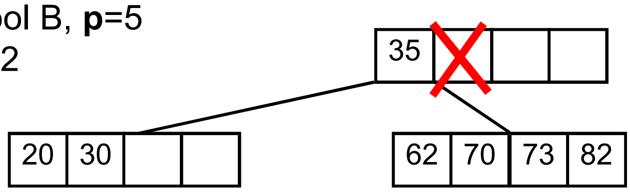



- **Ejemplo.** Eliminar 39.

## 3.4. Árboles B.

– **Ningún hermano con más de d entradas:** Con la hoja donde se hace la supresión (**d-1** entradas) más una hoja hermana (**d** entradas) más la entrada del padre, se crea una nueva hoja con **2d** entradas.

Árbol B, **p**=5
**d**= 2




- **Ejemplo.** Eliminar 39.
- **Ojo:** Se suprime una entrada en el padre. Se debe repetir el proceso de eliminación en el nivel superior.



## 3.4. Árboles B.

**Conclusiones**

- El orden de complejidad es proporcional a la altura del árbol, ~ $\log_{p/2} n$ en el peor caso.
- Normalmente, el orden **p** del árbol se ajusta para hacer que cada nodo esté en un bloque de disco, minimizando el número de operaciones de E/S.
- **Representación en memoria:** mejor usar AVL.
- **Representación en disco:** mejor usar árboles B.

## 3. Repr. de conjuntos mediante árboles.

### Conclusiones generales

- Representaciones **arbóreas frente a** representaciones **lineales** (listas y arrays).
- Necesidad de incluir **condiciones de balanceo** para garantizar eficiencia en todos los casos.
- **Distinción** entre TAD y estructura de datos:
  - TAD árbol, binario, n-ario, etc.
  - Usamos estructuras de árboles para representar el TAD conjunto y diccionario.
  - Para el usuario lo importante es la interface (las operaciones accesibles) independientemente de la representación interna.